Sastavljanje zadataka iz logike

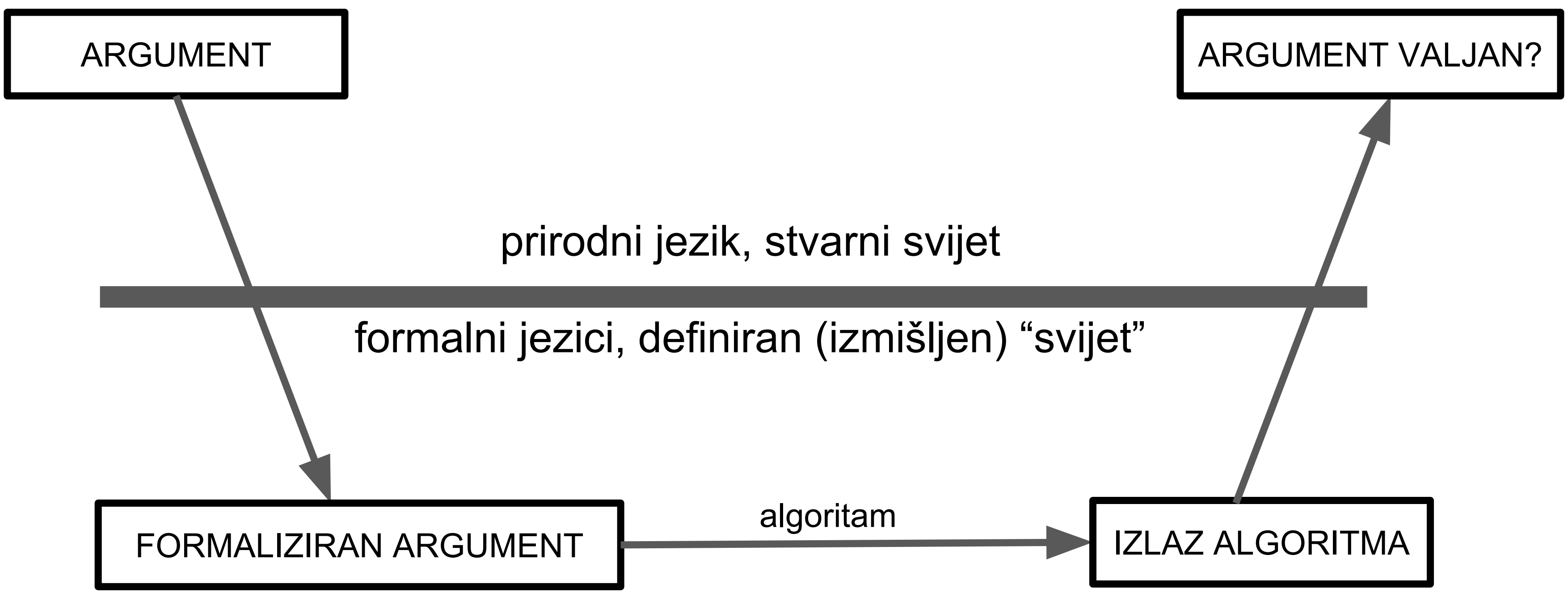
Luka Mikec, Zagreb, 17. ožujka 2018.

Ciljevi nastave

- Osnovni cilj: razvoj kritičkog mišljenja.

- Dva načina:
  - Izravno, neformalna logika.
    - Logičke greške.
    - O definicijama.
    - Dijagramiranje argumenata (uskoro).
  - Neizravno, formalna logika.

Formalna logika u nastavi (valjanost argumenta)



Formalna logika u nastavi

- Prikladna samo za umjetne deduktivne da/ne argumente.
- Ipak, anegdotalno: doista povećava moć kritičkog mišljenja.
- Istraživanja: od nema pomaka do ~ 2x boljih rezultata.
- Izravno korisna za neke studije: matematika, informatika, filozofija, pravo(?), donekle strojarstvo, fizika, ...

Zadaci iz logike

- Ukratko:
  - težiti tome da zadatak ispituje sposobnost procjenjivanja argumenata;
  - izbjegavati nejasnoću, dvosmislenosti, kombinatornu težinu.

- Kreativnost manje važna.
  - Logičar/filozof George Boolos o filozofiji: Jasnoća je važna, a raskoš, doseg, domet, značaj, važnost - to su sretni ishodi.

Neki problematični zadaci

1. Zadaci koji u osnovi nisu logički zadaci.
2. Kombinatorni zadaci i zagonetke.
3. Problematično formulirani zadaci.

1. Zadaci koji u osnovi nisu logički zadaci

- tj., zadaci koji ne ispituju nešto što bi se moglo nazvati logikom.

Primjer 1a. Tradicionalni silogizmi (figure, modusi, …)

- Tradicionalni silogizmi niti općenito vrijede kao pravila dobrog zaključivanja, niti hvataju neku teorijski zanimljivu klasu argumenata.
- Nažalost, mnogi po ovome pamte srednjoškolsku logiku.

Primjer 1b. Zadaci koji se temelje na kompliciranim konvencijama.

- Je li pojam ***okrugao kvadrat*** razdvojen od samog sebe?
- Je li ***Postoji nešto što, ako je lijepo, onda je sve lijepo.*** valjana propozicija?
    - Oboje ok ako u zadatku objasnimo konvencije.

1. Zadaci koji u osnovi nisu logički zadaci - nastavak

Primjer 1c. (Više puta na natjecanjima) ***Pomaknite točno 3 šibice/crtice kako biste dobili logičku formulu.***

- Spominjanje logičkih termina ne čini zadatak logičkim zadatkom.

Primjer 1d. (S jednog natjecanja) **Zbrajanje prirodnih brojeva možemo definirati preko operacije sljedbenika na sljedeći način:**

n + 0 = n;
n + sljedbenik(m) = sljedbenik(n + m).

Kako definirati množenje koristeći operacije sljedbenika i zbr.?

- Nema veze s logikom (sš) - nije svako zaključivanje (analogijsko, matematičko itd.) logičko zaključivanje.

2. Kombinatorni zadaci

Slično kao posljednji primjeri, zadaci koji zahtijevaju neki tip zaključivanja, ali u osnovi ne logički tip zaključivanja, no koji su uz to i teški.

<u>Primjer 2a.</u> Zagonetke. Npr. ***Je li moguće popločiti ploču dimenzija 8x8 kojoj nedostaju prvo i posljednje polje pločicama dimenzija 2x1?***

- Odgovor ima logički oblik (r. a. a.):
    - Pretpostavimo da možemo.
        - Svaka iskorištena pločica pokriva jedno parno i jedno neparno polje.
        - Ploča zbog izbačenih polja ima dva parna polja manje.
        - Kontradikcija.
    - Ne možemo.
- No, težina zadatka je u zaključivanju specifičnom za domenu (kombinatoriku: konačni skupovi, funkcije, permutacije, ...)

2. Kombinatorni zadaci - nastavak

Primjer 2b. **Koliko je međusobno neekvivalentnih ispunjivih iskaza u logici sudova, sastavljenih koristeći najviše dva slova i dva veznika?**

- Npr. iskazi “A i B”, “A ili ne-B”. ali ne i “ne-A ili ne-B”, “A i ne-A”.
- Ideja: izbrojati sve istinitosne tablice s danim uvjetima (od 16 mogućih tablica), svakoj tablici odgovara klasa ekvivalentnih iskaza.
- Dobar zadatak za vrlo specifične škole - npr. vrlo matematički ili informatički orijentirane.
- U općenitom slučaju, zbunjujuć i težak, i teško je tvrditi da pridonosi strogo logičkim vještinama.

Primjer 2c. ***Napišite istinitosnu tablicu za iskaz [iskaz sa 6 jdn. podisk.]*** ili ***Provjerite ispunjivost/zadovoljivost skupa iskaza [skup s 10 iskaza]***.

3. Problematično formulirani zadaci

Primjer 3a. Teorijski problematični zadaci. Npr., ***Slijedi li iz toga da ako je A, onda je B, da je A dovoljan uvjet za B?***

- Problem:
  - prva rečenica (*ako A onda B*) se shvaća kao istinitosno-funkcionalna tvrdnja: nije istinito A, ili je istinito B;
  - druga rečenica (*A je dovoljan uvjet za B*) ne govori samo o trenutnom stanju istinitosti A i B, nego o tome kakav taj odnos može biti.
- Pitanje slijeda između istinitosno-funkcionalnih i ostalih rečenica nije u programu srednjoškolske logike.
- Sličan problem (državno 2011.): ***Zakon neprotuslovlja i zakon isključenoga srednjega istovrijedni su.***
  - Što znači da su zakoni istovrijedni? Oba odgovora moguća.

3. Problematično formulirani zadaci - nastavak

Primjer 3b. Teorijski problematični zadaci. ***Zaokružite točne odgovore: a) Ovaj odgovor je istinit. b) Prethodni odgovor je istinit.***

- Osim teorijskog problema (samoreferentnost): više rješenja.
- Opet, iskustvo pokazuje, učenici će pogoditi intendirano rješenje.
- No, treba izbjegavati takva zlorabljenja uobičajenog pojma istine:
  - ***Zaokružite točne odgovore:***
    a) Sljedeći odgovor nije istinit. b) Prethodni je odgovor istinit.
  - Ako a), onda nije b), pa nije a), dakle nije a); dakle b), dakle a), kntr.
  - Zadatak je teorijski neutemeljen, pa paradoksalnost nije neobična.

3. Problematično formulirani zadaci - nastavak

Primjer 3c. Nedefinirani i nejasni uvjeti zadatka. Npr. ***Je li sud "B" podređen sudu "Ako A, onda B"?***

- Intencija zadatka: promatrati sudove kao pojmove - predmeti su situacije koje ispunjavaju dane sudove (npr. situacija {A: i, B: n, C: n, D: i, ...}).
- No, nije definirano što znači da je jedan sud (logike sudova) podređen drugom sudu.
  - Ključan problem. Nije dobro "normalizirati" loše izražavanje - nejasnoće su čest izvor problema u komunikaciji i argumentaciji.
  - Problem-na-licu-mjesta: što ako učenik krivo shvati intenciju? Tada učenik **nije** pogriješio - problem je u sastavljaču.

- Ovaj zadatak **nije loš ako** se prvo definira što znače korišteni termini.

3. Problematično formulirani zadaci - nastavak

Primjer 3d. Zadaci koje nisu nejasni sami po sebi, ali ih intrinzične ambiguoznosti prirodnog jezika čine nejasnima. ***Je li sud “bilo A, bilo B” istinit ako su i A i B istiniti (pod)iskazi?***

- Ambiguoznost u jeziku - odgovor ovisi o shvaćanju. Stara konvencija na natjecanjima:
  - ili A, ili B → isključna disjunkcija;
  - ili A ili B → **uključna** disjunkcija;
  - bilo A, bilo B → **uključna** disjunkcija;
  - bilo A bilo B → **uključna** disjunkcija.

Pozitivni primjeri: rutinski zadaci

- Neki logički odnosi koji se ispituju (skupovi mogu biti prazni i jednočlani):
  - slijed iskaza iz skupa iskaza (tj. valjanost argumenta/zaključka);
  - ispunjivost/zadovoljivost skupa iskaza;
  - međusobna isključivost iskaza iz nekog skupa;
  - ekvivalentnost/istovrijednost iskaza iz nekog skupa;
  - međusobna kontradiktornost dva iskaza;
  - valjanost iskaza;
  - nevaljanost iskaza;
  - ispunjivost/zadovoljivost iskaza;
  - kontradiktornost iskaza;
  - (za vrlo specifične iskaze - još i svi odnosi iz logičkog kvadrata).

Pozitivni primjeri: rutinski zadaci - nastavak

- Ovisno o tipu iskaza, iskazi se mogu formalizirati u sljedeće jezike:
  - jezik logike sudova (propozicijske/iskazne/propozicionalne logike);
  - jezik logike prvog reda (predikatske/priročne logike prvog reda);
  - jezik tradicionalnih kategoričkih sudova (a, e, i, o).
- Ovisno o odabranom jeziku, dostupni algoritmi:
  - tablice;
  - reductio ad absurdum;
  - stabla;
  - Vennovi dijagrami;
  - * prirodna dedukcija - nije algoritam, zahtijeva više od memoizacije pravila, ali jest metoda kojom se mogu utvrditi neki od tih odnosa.

Pozitivni primjeri: rutinski zadaci - nastavak

Struktura rutinskog zadatka: ***Formalizirajte sljedeće rečenice prirodnog jezika u jeziku … te provjerite … koristeći metodu …***

- Koristeći različite kombinacije - oko 50 tipova zadataka!
- Jezik i metoda ne moraju biti zadani - nije loše učeniku ostaviti odabir optimalne metode.
- Ako su jezik i metoda zadani, treba paziti da težina zadatka u toj kombinaciji ne bude u količini posla (npr. tablice s 32 retka).

Pozitivni primjeri: o prirodnoj dedukciji

- Prirodna dedukcija razvija općenitu sposobnost dokazivanja.
- VRLO korisno budućim studentima matematike.
- U nekoj mjeri korisna studentima filozofije te tehničkih i prirodnih znanosti (obično reprodukcija gotovih dokaza).
- Moje mišljenje: prirodna dedukcija je jedan od najkorisnijih dijelova srednjoškolskog obrazovanja, vrlo primjerena za natjecanja iz logike, **ali** vjerojatno ju nema smisla obrađivati u školama s ispod/prosječnim* učenicima (kojima su i algoritmi poput stabala problem).
  - “Smisao” korištenja prirodne dedukcije nije mehanička provjera valjanosti argumenata, nego dokazivanje slijeda u područjima za koje ne postoji mehanička provjera valjanosti - to uključuje teorije prvog reda (posebno i logiku prvog reda), ali ne jednostavne primjere koji se rade u srednjoj školi.

* - nije riječ o učenicima koji ne bi mogli savladati prirodnu dedukciju (kada bi htjeli), nego koji naprosto ne pristupaju nastavi s potrebnom količinom interesa.

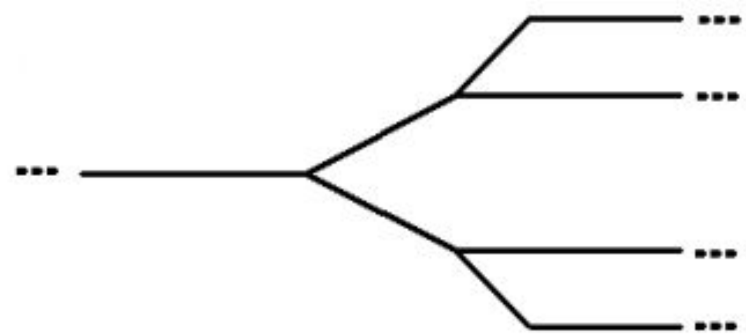
Pozitivni primjeri: zadaci koji nisu rutinski

Primjer 4a. (državno 2006.)

- Čitanje formula.
- Nov sadržaj (strukture vremena), ali poznata forma (strukture prvoga reda).
- Samo na prvi pogled težak zadatak.
- Teorijski primjeren: zadana struktura i treba odrediti istinitost.

4. Analizirat ćemo dvije predodžbe: (1) pravocrtno vrijeme i (2) razgranato vrijeme. Odnos Rxy vrijedi ako i samo x jest lijevo na istoj crti od y. Točke ispred ili iza crta označuju beskonačno nastavljanje crte (bez spajanja već razgranatih crta). Uz svaki od sljedećih iskaza upišite 'DA' ako vrijedi za pojedinu predodžbu vremena, ili 'NE' ako ne vrijedi!

Sl. 1



Sl. 2

	Sl. 1	Sl. 2
$\forall x Rxx$		
$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$		
$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$		
$\forall x \forall y ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y)$		
$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow (Ryz \vee Rzy))$		
$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow \exists w (Ryw \wedge Rzw))$		
$\forall x \exists y (Rxy \wedge \forall z (Rxz \rightarrow z = y))$		
$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (\neg Rxy \vee \neg Ryx))$		
$\forall x \forall y \forall z \; ((Rxz \wedge Ryz) \rightarrow (x = y \vee Rxy \vee Ryx))$		
$\exists x \exists y \exists z \; (Rxy \wedge Rxz \wedge y \neq z \wedge \neg Ryz \wedge \neg Rzy)$		

Pozitivni primjeri: zadaci koji nisu rutinski

Primjer 4b. (državno 2010,)

❹ Proučite zadani tekst koji opisuje jednu filozofijsku analizu znanstvenoga jezika:

> Jedna konzistentna teorija ima veću dokaznu snagu od druge konzistentne teorije akko prva može dokazati sve ono što može i druga, a druga ne može dokazati sve ono što može dokazati prva.
> Označimo pomoću $\mathcal{L}_O$ opažajni jezik izgrađen nad rječnikom koji pored logičkih simbola sadrži samo opažajne termine, te označimo pomoću $\mathcal{L}_{T\cup O}$ teorijski jezik izgrađen nad rječnikom koji pored logičkih simbola sadrži i opažajne i teorijske termine.
> Filozof Carl Gustav Hempel (1905–1997) dokazao je sljedeći poučak:
> *Za svaki skup T rečenica iz jezika $\mathcal{L}_{T\cup O}$ postoji rekurzivno prebrojiv skup T^* rečenica iz jezika $\mathcal{L}_O$ takav da za bilo koju rečenicu p iz jezika $\mathcal{L}_O$ vrijedi da ako T dokazuje p, onda i T^* dokazuje p.*

S obzirom na zadani tekst, odredite posljedičnu točnost sljedećih tvrdnji:

(a) Hempelov poučak pokazuje da za svaku konzistentnu teoriju iskaznu opžajnim jezikom postoji njezino konzistentno proširenje rečenicima iz teorijskoga jezika koje će omogućiti da se dokažu neke rečenice iz opažajnoga jezika koje ta teorija prije proširenja nije mogla dokazati.

DA NE

(b) Hempelov poučak pokazuje da postoji rečenica p iz jezika $\mathcal{L}_O$, dokaziva pomoću skupa T rečenica iz jezika $\mathcal{L}_{T\cup O}$, koju niti jedan rekurzivno prebrojiv skup T^* rečenica iz jezika $\mathcal{L}_O$ ne može dokazati.

DA NE

Primjer 4c.

(državno 2014.)

Neka je $F \rightsquigarrow G$ pokrata za odnos između formula F i G ako vrijedi:

iz F logički slijedi G
iz G logički ne slijedi F

Ako vrijedi $F \rightsquigarrow G$ i $G \rightsquigarrow H$, to možemo skraćeno zapisati kao $F \rightsquigarrow G \rightsquigarrow H$, analogno za veći broj formula.
Na prazne crte upišite odgovarajuće formule vodeći računa o sljedećem:

- Na početku svakog niza naveden je skup dopuštenih iskaznih slova i/ili predikata koje se mogu (ali ne moraju) iskoristiti, te **nije** dopušteno korištenje drugih iskaznih slova ili predikata.
- Ako postoji više mogućih rješenja, dovoljno je navesti jedno.
- Ako rješenje ne postoji, upišite "/".
- Simbol $\top$ zamjenjuje bilo koju tautologiju.
- Bodovi se za ispravno popunjenu crtu dobivaju samo ako je i ostatak podzadatka ispravno riješen.

Prvi je podzadatak riješen.

1. $\{P, Q\}$: $P \wedge Q \rightsquigarrow \underline{P} \rightsquigarrow P \vee Q$
2. $\{P, Q\}$: $P \wedge Q \rightsquigarrow$ ________ $\rightsquigarrow Q$
3. $\{P, Q, S\}$: $P \wedge Q \wedge S \rightsquigarrow$ ________ $\rightsquigarrow$ ________ $\rightsquigarrow$ ________ $\rightsquigarrow$
   $(Q \to S) \to P \rightsquigarrow$ ________ $\rightsquigarrow$ ________ $\rightsquigarrow \top$
4. $\{=\}$: $\exists x \forall y (x = y) \rightsquigarrow$ ________ $\rightsquigarrow$
   $\forall x \forall y \forall z \forall w (x = y \vee y = z \vee z = w \vee w = x)$
5. $\{R^2\}$: $\forall x Rxx \wedge \forall x \forall y \forall z (Rxy \to (Rxz \to Ryz)) \rightsquigarrow$
   ________ $\rightsquigarrow$
   $\forall x \forall y \forall z (Rxy \to (Ryz \to Rxz))$
6. $\{P^2, S^2\}$: $\forall x \exists y \forall z (Pyx \wedge Syz) \rightsquigarrow$ ________ $\rightsquigarrow$
   ________ $\rightsquigarrow \forall x \exists y Syx$

Zaključak

- Nastava logike kao sredstvo razvoja kritičkog mišljenja:
  1. Izravno (neformalna logika)
  2. Neizravno (formalna logika)

     Izbjegavati:
     a. zadatke koji nisu logički (tradicionalna silogistika, komplicirane konvencije);
     b. kombinatorne zadatke (zaključivanje, ali težina u ne-logičkom zaključivanju);
     c. teorijski problematične, nejasne, višesmislene zadatke.
- Velik broj mogućih rutinskih zadataka, vjerojatno dovoljno za redovnu nastavu.
- Zadaci koji nisu rutinski ne moraju biti kreativni (u smislu novog formata).

Hvala na pažnji.