Topološka interpretacija sustava GL

Autor: Luka Mikec
Mentor: dr.sc. Mladen Vuković

Sadržaj

1 Uvod i sustav GL

Definicija 1. Formula *(ϕ) je riječ iz jezika kojeg definiramo rekurzivno:*

$$\phi ::= (F \to G) \mid \Box F \mid \bot \mid prop$$

ako su pritom F i G također formule, a prop iz skupa $\{p, q, r, s, p_0, p_1, p_2, ...\}$.

Ako formule gledamo kao izraze s operatorima i operandima, onda $\Box$ ima najviši prioritet i za $\to$ nije predefinirana lijeva ili desna asocijativnost. Imajući to na umu, pri pisanju formule ispuštamo zagrade koje ne pridonose jednoznačnosti čitanja formule. Kad trebamo govoriti o (pod)formulama koristimo simbole $F, G, H, \ldots$

Definicija 2. *Sustav* **GL** *(prema Gödel-Löb) je najmanji skup formula sa sljedećim svojstvima:*

- *Sadrži sve tautologije propozicijske logike.*[1]

[1] Ako pritom sve podformule oblika $\Box F$ uniformno zamijenimo s novim propozicijskim slovom. Npr. $\Box p \to (\Box(p \to \bot) \to \Box p)$ gledamo kao $r \to (s \to r)$.

- *Za formule F, G vrijedi $\Box(F \to G) \to (\Box F \to \Box G) \in$ **GL**. (shema aksioma K)*
- *Za formulu F, vrijedi $\Box(\Box F \to F) \to \Box F \in$ **GL**. (shema aksioma G)*
- *Za formule $F, (F \to G) \in$ **GL**, vrijedi $G \in$ **GL**. (zatvorenje modus ponensom)*
- *Za formulu $F \in$ **GL**, vrijedi $\Box F \in$ **GL**. (zatvorenje nužnošću)*

Za **GL** postoje hilbertovski aksiomatski sustav prirodno dobiven iz gornje definicije, te sustavi prirodne dedukcije.

Klasična relacijska semantika za **GL** je valjanost na skupu svih tranzitivnih inverzno dobro fundiranih modela. Takav model je trojka $\mathcal{M} = (W, R, V)$ za koju vrijedi $W \neq \emptyset$, $R \subseteq W^2$ i R je tranzitivan i inverzno dobro fundiran, te $V \subseteq W \times prop$.

Valjanost na skupu modela je valjanost u svakom modelu iz skupa, a valjanost u modelu je istinitost u svim $w \in W$, što definiramo rekurzivno. $\mathcal{M}, w \vDash F$ akko (1) $F \in prop$ i wVp, (2) $F = (G \to H)$ i: $\mathcal{M}, w \nvDash G$ ili $\mathcal{M}, w \vDash H$, ili (3) $F = \Box G$ i $\forall x(wRx \to \mathcal{M}, x \vDash G)$.

GL slabo potpun u odnosu na ovakvu (tzv. relacijsku) semantiku (ili mogućih svjetova, Kripkeovu, ...). Iz klasičnog dokaza potpunosti (v. [1]) proizlazi prirodan algoritam koji garantira nalaženje protuprimjera $\mathcal{M}$ formuli F koja nije teorem u gornjoj granici veličine modela ovisnoj o $|F|$ pa je **GL** i odlučiv sustav.

Neki sustavi modalne logike imaju i (neki i samo) topološku semantiku. Topološke interpretacije su nešto kompliciranije pa ćemo prvo uvesti neke pojmove iz topologije i teorije skupova.

Zašto tražiti druge semantike? Osim što ne vrijedi jaka potpunost u odnosu na relacijsku semantiku, polimodalno proširenje **GL** s operatorima $[n]$[2] nema adekvatnu relacijsku semantiku. No, ima topološku semantiku. Ovaj je rad ograničen na **GL** i njegovu topološku semantiku.

Osnovni rezultat dao je Leo Esakia u [2]. Pokazao je potpunost **GL** u odnosu na raspršene topološke prostore. Taj su rezultat neovisno nadogradili Abashidze i Blass. Oni su pokazali da je **GL** potpun i u odnosu na ordinal ω^ω promatran kao topološki prostor s uređajnom topologijom. Točnije, Blass je to pokazao za tzv. filtersku semantiku, no kako će se vidjeti u posljednjem poglavlju (teorem 53) taj se rezultat može prilagoditi rezultatu za topološku interpretaciju.

Rad se fokusira na Blassov dokaz iz [3], većina definicija i dokaza ide u smjeru preduvjeta za Blassovu verziju dokaza. U okviru tih preduvjeta daje se pregled topoloških prostora, filtera i ordinalnih brojeva. S obzirom na to da se Blassov dokaz oslanja na dokaz potpunosti u odnosu na relacijsku semantiku, navode se i neki rezultati vezani uz manje klase okvira dovoljne za nalaženje protuprimjera formulama koje nisu **GL** teoremi.

Što se tiče topološke semantike, daju se dokazi adekvatnosti za sustave **wK4** (klasa svih prostora) i **GL** (klasa raspršenih prostora).

Taj dio je u skladu s Esakijinm rezultatima, no kako je njegov članak ([2]) nedostupan, ne izlaže se i dokaz potpunosti. Preostala materija (pretežito u poglavlju o filterima i filterskoj semantici) je u službi Blassovog dokaza potpunosti u odnosu na ω^ω promatranog kao "okvir" za filterske modele.

Pokazuje se veza filterske i topološke intepretacije, odnosno korolar da se iz Blassove filterske interpretacije može dobiti i topološka intepretacija. Na kraju se daje argument da **GL** niti uz

[2] Iako nije vezano uz temu seminara, dobro je spomenuti da je **GL** najzanimljiviji jer adekvatno i potpuno opisuje logiku predikata $Dokazivo(\#F)$ u klasičnim formalnim aritmetikama, gdje je $\#F$ numeral Gödelovog broja formule F. $\Box F$ čitamo kao $Dokazivo(\#F)$, i svaki teorem **GL** tako preveden daje istinitu i dokazivu formulu aritmetike. Veza je vrlo duboka jer vrijedi i u drugom smjeru, od formula aritmetike ka **GL**. Ta je veza zanimljiva prvenstveno jer je **GL** odlučiv i jednostavan sustav, za razliku od kaotičnijih sustava aritmetika.

n-dokazivost (kojom čitamo $[n]$) je dokazivost uz n primjena tzv. ω pravila. To je hipotetsko pravilo u kojem iz beskonačnog niza formula koji za $n \in \mathbb{N}$ sadrži formulu $F(\#n)$ ($\#n$ je numeral broja n) izvodimo formulu $\forall n F(n)$.

Ako postoji n za koji je F n-dokaziva, tada je F istinita. Unija svih takvih formula čini standardni (aritmetički nedefinabilan) model aritmetike.

semantiku ω^ω topološkog prostora nije (lokalno) kompaktan niti je u odnosu na takvu semantiku jako potpun.

2 Ordinali kao topološki prostori

2.1 Topološki prostori

Osnovni pojam topologije je topološki prostor koji definira (1) točke prostora i (2) "otvorene" podskupe prostora.

Uz ta dva pojma, topologija može formalizirati neke druge pojmove iz metričkih prostora poput okoline točke i gomilišta.

Ako se žele dobiti neka svojstva klasičnih prostora, npr. da okoline gomilišta u $\mathbb{R}^n$ sadrže beskonačno mnogo drugih točaka, mogu se dodavati dodatni uvjeti na prostore. Neka češća ograničenja daju tzv. aksiomi separacije.

Definicija 3. Topološki prostor *je par* $(X, \mathcal{T})$. *Vrijedi:*

- X *je proizvoljan neprazan skup i njegove elemente nazivamo točkama. Cijeli prostor* ***također*** *označavamo s* X*, osim kad smisao ne bi bio jasan.*
- $\mathcal{T}$ *je familija podskupova od* X*, tj.* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *(topologija). Te vrijedi:*
  1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
  2. $\mathcal{T}$ *je zatvorena na konačne presjeke i*
  3. $\mathcal{T}$ *je zatvorena na proizvoljne unije.*

Topologija je **diskretna** ako sadrži sve podskupove od X. Ako sadrži samo $\emptyset$ i X naziva se **indiskretna**.

Postoje neke intuicije iza dopuštanja samo konačnih presjeka, ali proizvoljnih unija.

Napomena 4 (Motivacija iza proizvoljnih unija i konačnih presjeka)**.** *U ovoj napomeni okolinu shvaćamo kao nadskup "otvorenog skupa", tj. skupa* $O(x) = \{y \mid d(x,y) < \epsilon\}$ *za proizvoljno mali* ϵ*, gdje je* d *metrika. U topologiji se pojam okoline točke* t *definira kao proizvoljan nadskup nekog otvorenog skupa koji sadrži* t*. Ovdje se tek daje intuicija što je otvoren skup, pa koristimo pojam okoline iz metričkih prostora.*

Otvorene skupove zamišljamo kao skupove koji sadrže bar jednu okolinu (susjedstvo) svakog svog elementa. Tako npr. zatvoren krug (s kružnicom) nije otvoren skup jer bilo koja okolina točke na kružnici sadrži i barem jednu točku izvan zatvorenog kruga. Slično, otvoreni krug (bez kružnice) je otvoren skup.

Ako gledamo nekakvu proizvoljnu uniju otvorenih skupova $Q = \cup_{i \in I} S_i$*, jasno je da će svaka točka imati barem jednu svoju okolinu unutar* Q*. To će biti npr. ista ona okolina koju je imala u nekom od* S_i*.*

Zatim gledamo proizvoljan presjek $Q = P \cap Q$*. Uzmimo* $x \in Q$*. Presjek nekih okolina* x *iz* P *i* S *sigurno sadrži barem jednu okolinu od* x*. Pretpostavimo li da nijedna okolina iz* x *nije potpuno sadržana u* Q*, tada se* x *nalazi na rubu* Q*. To je moguće samo ako je* x *bio na rubu neke od izvornih okolina, što je nemoguće.*

Konačno, pogledajmo proizvoljni presjek $Q = \cap_{i \in I} S_i$*. Uzmimo otvorene skupove*

$$\left\{ \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

u $\mathbb{R}$. *Bilo koji konačan presjek je ponovno element tog skupa, pa time i otvoren.*

No, presjek svih tih skupova je $\{0\}$ *pa bismo ga morali proglasiti otvorenim što je protivno želji da održimo intuiciju otvorenog skupa iz metričkih prostora.*

Još jedna egzotičnija motivacija.

Napomena 5 (parafrazirano iz [4], skraćeno i prevedeno)**.** *Zamislimo da imamo ravnala* $R = \{r_0, r_1, \ldots\}$ *takva da je svakom ravnalu pridružen skup* $L(r_i)$ *duljina. Ako je* $l \in L(r_i)$*, tada* r_i *prilikom mjerenja objekta duljine* l *može potvrditi da je objekt doista duljine* l*.*

Dokaz da je duljina objekta iz proizvoljne unije skupa duljina svodi se na uzimanje jednog od ravnala koje može potvrditi tu duljinu.

Dokaz da je duljina objekta iz konačnog presjeka skupa duljina svodi se na provjeru objekta svim ravnalima koje odgovaraju skupovima koje dovodimo u presjek.

Ako u presjek dovedemo beskonačno mnogo skupova, ne bismo mogli demonstrirati pripadnost presjeku (u konačnom vremenu).

Često se promatraju "prirodni" topološki prostori danog skupa, ili prostori čije su topologije inducirane nekom operacijom.

Definicija 6. Baza B *dane topologije* $\mathcal{T}$ *je skup za koji vrijedi:*

- $\bigcup B = \bigcup \mathcal{T}$,
- B *je zatvoren na konačne presjeke i*
- $\mathcal{T}$ *je zatvorenje* $B \cup \{\emptyset\}$ *na proizvoljne unije.*

Podbaza B *dane topologije* $\mathcal{T}$ *je skup za koji vrijedi:*

- $\bigcup B = \bigcup \mathcal{T}$,
- *postoji skup* B' *koji je zatvorenje* B *na konačne presjeke i* B' *je baza* $\mathcal{T}$.

Ukratko, podbaza je familija skupova istih točaka koje sadrži i prostor, i topologija je zatvorenje na proizvoljne unije zatvorenja podbaze na konačne presjeke.

Primijetimo da podbaza jedinstveno određuje topologiju, ali ne i obratno.

Definicija 7. Uređajna topologija danog linearno uređenog skupa $(X, <)$ *je par* $(X, \mathcal{T})$. $\mathcal{T}$ *ćemo definirati preko podbaze* B. *Vrijedi:*

- $\langle a, b\rangle \in B$, *ako je* $a < b$,
- $[\min X, b\rangle \in B$, *ako postoji* $\min X$ *te* $\min X < b$ *i*
- $\langle a, \max X] \in B$, *ako postoji* $\max X$ *te* $a < \max X$.

Primijetimo da druga dva uvjeta imaju s jedne strane uključene granice. To bi se moglo učiniti protivnim intuiciji iza otvorenih skupova. No te granice su granice samog prostora pa se ne mogu iskoristiti za dobivanje drugih (polu)zatvorenih intervala.

Uređajna topologija je posebno korisna kad želimo o $\mathbb{R}$ (ali i $\mathbb{Q}$ te $\mathbb{N}$) razmišljati kao o topološkom prostoru. Otvoreni skupovi $\mathbb{R}$ kao metričkog prostora tada se poklapaju s otvorenim skupovima $\mathbb{R}$ kao topološkog prostora.

Definicija 8. *Neka je zadan topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$. *Tada:*

- *$t \in X$ je gomilište skupa $S \subseteq X$ ako svaki otvoreni skup koji ju sadrži, sadrži i neku točku $t' \neq t, \in S$.*
- *Za $S \subseteq X$, s dS označavamo derivat skupa S. Definiramo ga kao skup svih gomilišta skupa S.*
- *Za $S \subseteq X$, za $cS := S \cup dS$ kažemo da je zatvorenje skupa S.*
- *$t \in X$ je izolirana točka u $S \subseteq X$ ako postoji $O \in \mathcal{T}$ takav da $S \cap O = \{t\}$.*
- *$S \subseteq X$ je gust-u-sebi ako ne sadrži izoliranu točku.*
- *X je raspršen (scattered) ako nema nepraznih gustih-u-sebi podskupova.*

S obzirom na to da smo u posljednjoj točki nanizali nekoliko razina negacija i kvantifikatora, sažet ćemo tu definiciju u jedan uvjet.

Napomena 9. *$(X, \mathcal{T})$ je raspršen topološki prostor ako i samo ako*

$$\left(\forall S \overset{\supset \emptyset}{\subseteq X}\right) (\exists O \in \mathcal{T})(\exists t \in S)(S \cap O = \{t\}).$$

Napomena 10. *Nekoliko primjera raspršenih topoloških prostora:*

- *Bilo koji skup uz diskretnu topologiju.*
- *$(\{1,2,3\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\})$.*
- *$(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, ako je $\mathcal{T}$ uređajna topologija na $\mathbb{N}$.*
- *$(\alpha, \mathcal{T})$, ako je α ordinal, a $\mathcal{T}$ uređajna topologija na α.*

Propozicija 11. *Svojstvo raspršenosti je za konačne prostore ($|X| < \omega$) ekvivalentno svojstvu:*

$$(\forall x, y \in X) \left[(\forall O \in \mathcal{T})(x \in O \leftrightarrow y \in O) \to x = y\right]. \qquad (\Delta)$$

Dakle, ne smije postojati (neuređeni) par različitih točaka koje se u otvorenim skupovima uvijek javljaju u paru.

Dokaz. $\Rightarrow$. Pretpostavimo da ne vrijedi Δ. Označimo s x_0 i y_0 neke točke koje krše Δ. Stavimo $S_0 = \{x_0, y_0\}$. Iz definicije raspršenosti trebao bi postojati otvoreni skup O koji u presjeku s S_0 izolira ili x_0 ili y_0. No, jer x_0 i y_0 krše Δ, te se dvije točke uvijek javljaju u paru.

$\Leftarrow$. Pretpostavimo da Δ vrijedi i neka je $S_0 \subseteq X$ proizvoljan veličinom minimalni skup za koji vrijedi $\emptyset \subset S_0 \subseteq X$ te za koji ne postoji otvoren skup koji izolira neku (točno jednu) njegovu točku. Primijetimo $|S_0| \geq 2$, inače je S_0 prazan ili X izolira njegovu jedinu točku.

Zatim, neka je $I_0 \in \mathcal{T}$ proizvoljan otvoreni skup takav da je skup $P = S_0 \cap I_0$ neprazan i veličinom minimalan (pod uvjetom da je P neprazan). Takav skup sigurno postoji jer za I_0 uvijek potencijalno možemo odabrati X te imati $P = S_0$.

Prvo, jasno je da $2 \leq |P| \leq |X|$ jer bismo inače kršili eksplicitne uvjete pri odabiru S_0 i P.

Sad zbog Δ slijedi da za neke različite $x_0, y_0 \in P$ vrijedi da postoji otvoreni skup O_0 koji sadrži točno jedno od x_0 i y_0.

$P' = P \cap O_0$ $(= S_0 \cap I_0 \cap O_0)$, i $1 \leq |P'| < |P|$, što je kontradikcija s odabirom I_0 kao onog kojeg minimizira veličinu $S_0 \cap I_0$. $\square$

Nažalost, ovo lijepo svojstvo nije ekvivalentno raspršenosti kod beskonačnih prostora. Jednostavan protuprimjer je $\mathbb{Q}$ s uređajnom topologijom. Presjek primjerice $\langle 0, 1 \rangle$ s bilo kojim otvorenim skupom, dakle skupom oblika $\langle a, b \rangle$, nikad nije jednočlan skup. Stoga to nije raspršen prostor. No svaka dva racionalna broja možemo odijeliti nekim otvorenim intervalom.

2.2 Ordinalni brojevi

GLje potpun u odnosu na klasu raspršenih (*scattered*) prostora (Esakia), ali je to i jedna njena podklasa koju čine ordinali. Štoviše, **GL** je potpun i u odnosu na bilo koji ordinal veći od ω^ω.

Uvedimo potrebne pojmove uglavnom sljedeći izlaganje u [5]. Ponegdje ćemo inače općenitije korištenje uređajnih relacija suziti na relaciju $\in$, jer nas samo ona kasnije zanima.

Definicija 12. *Skup (familija) S je* tranzitivan *ako vrijedi* $(\forall P \in S)(P \subseteq S)$.

Definicija 13. *Parcijalno uređen skup* $(S, \in)$ *je* dobro uređen *ako za svaki* $\emptyset \subset P \subseteq S$ *postoji* $m \in P$ *takav da za svaki* $p \neq m$ *unutar* P *vrijedi* $m \in p$.

Definicija 14. *Skup S je ordinalan broj (ordinal) ako je tranzitivan i* $(S, \in)$ *je dobro uređen.*

Korolar 15. *Linearno uređen tranzitivan parcijalno uređen skup* $(S, \in)$ *je ordinal.*

Simbole α i β ćemo od sada koristiti za označavanje ordinala.

Uočimo da su elementi ordinala također ordinali. Ako je $S \in \alpha$, S je dobro uređen ($S \subset \alpha$ pa bi protuprimjer bio i protuprimjer tomu da je α dobro uređen). Zbog dobre uređenosti $(S, \in)$ je parcijalno uređen skup pa je $\in$ tranzitivan. Ako je P element od S, onda je P element i od α, pa je $P \subset \alpha$. Zbog tranzitivnosti relacije $\in$, ako je $x \in P$ imamo i $x \in S$. Stoga je S tranzitivan skup. A tada je S i ordinal.

Za parcijalno uređen skup $(S, <)$ i $c \in S$ označimo $p_S(c) = \{x \in S \mid c < x\}$. Radi se o oznaci "početnog komada" nekog skupa. U slučaju ordinala definicija se može pojednostavniti. $p_\alpha(\beta) = \alpha \cap \beta = \beta$. Jedini uvjet definicije je $\beta \in \alpha$, iz kojeg slijedi $\beta \subset \alpha$, pa smo mogli napraviti posljednji korak.

Dakle, početni komad ordinala je neki drugi ordinal manji ($\in$) od prvog.

Lema 16. *Ako je* $f : \alpha \to \alpha$ *injekcija koja čuva uređaj* ($x \in y \Rightarrow f(x) \in f(y)$)*, tada* $(\forall x \in \alpha)(x \in f(x))$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka $W = \{x \in \alpha \mid x \notin f(x)\}$ i $s = \min W$. $W \subseteq \alpha$ je dobro uređen i po pretpostavci $W \neq \emptyset$ pa minimum postoji. Zbog linearnosti slijedi $f(s) \in s$. Iz čuvanja uređaja slijedi $f(f(s)) \in f(s)$, dakle $f(s) \notin f(f(S))$, kontradikcija s minimalnošću s. □

Sličnost $f : S \to P$ je bijekcija koja čuva uređaj, ako postoji pišemo $S \simeq Q$.

Lema 17. *(a) Ako* $x, y \in \alpha$ *te* $x \neq y$*, tada* $x \not\simeq y$. *(b) Ako* $S \subseteq \beta$ *i* $\beta \in \alpha$*, tada* $S \not\simeq \alpha$.

Dokaz. (a) Zbog linearnosti i bez smanjena općenitosti smijemo pretpostaviti $y \in x$. Pretpostavimo da je $f : x \to x \supset y$ funkcija koja ostvaruje sličnost. Označimo $m = \min x \setminus y$. Zbog prethodne leme imamo da za m vrijedi $m \in f(m)$. Ali $f(m)$ je u y (f ostvaruje sličnost između x i y), pa je zbog tranzitivnosti y (y je ordinal) i $m \in y$, kontradikcija s odabirom m.

(b) Označimo $m = \min \alpha \setminus \beta$. Slično kao (a), neka je $f : \alpha \to \alpha \supset S$ funkcija koja ostvaruje sličnost (u drugom smjeru, svejedno je). Za m vrijedi $m \in f(m)$ (prethodna lema), ali $f(m) \in S \subseteq \beta \in m$, kontradikcija.

Ne vrijedi još općenitija verzija "Ako $P \subset \alpha$, onda $P \not\simeq \alpha$". Primjerice, skup parnih (konačnih ordinalnih) brojeva je sličan ω ($= \{0, 1, 2, \dots\}$). □

Lema 18. *Ako slicnost* $f : \alpha \to \beta$ *postoji, onda je ona jedinstvena.*

Dokaz. Neka je $g : \alpha \to \beta$ proizvoljna sličnost, $x \in \alpha$. $f(x) \simeq x \simeq g(x)$. Navedene sličnosti dobivaju se restrikcijom funkcija f i g. Prema prethodnoj lemi imamo $f(x) = g(x)$. x je bio proizvoljan, pa $f = g$. □

Definicija 19. *Ordinal α klasificiramo kao:*

- *0, ako $\alpha = \emptyset$, inače:*
- *prve vrste, ako $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ za neki β. Tada pišemo $\alpha = \beta + 1$. Inače:*
- *druge vrste ili graničan ordinal.*

Lema 20. *1. Ako $\alpha \simeq \beta$, onda $\alpha = \beta$.*

2. $\alpha \in \beta$ ili $\alpha = \beta$ ili $\alpha \ni \beta$.

3. Svaki skup ordinala je dobro uređen. Svaki tranzitivan skup ordinala je ordinal.

4. Ako je S skup nekih ordinala, vrijedi:

   - $\bigcup S = \sup S$ *i*
   - $\bigcap S = \inf S$.

   Dodatno, $\sup S$ *i* $\inf S$ *su ordinali.*

5. Postoje jedinstvene operacije $+$, $\cdot$ i potenciranje definirane na klasi svih ordinala, sa svojstvima:

   - – $\alpha + 0 = \alpha$,
     – $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ *te*
     – $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$ *ako je β graničan ordinal.*
   - – $\alpha \cdot 0 = 0$,
     – $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$ *te*
     – $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta\}$ *ako je β graničan ordinal.*
   - – $\alpha^0 = 1$,
     – $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$ *te*
     – $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\}$ *ako je β graničan ordinal.*

6. (Cantorova normalna forma). Postoji jedinstveni $n \in \mathbb{N}$ te jedinstveni ordinali $e_0, \dots, e_n$ i $c_0, \dots, c_n$ tako da vrijedi:

$$e_i > e_{i+1}, \text{ za } 0 \le i < n$$
$$c_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ za } 0 \le i \le n$$
$$\alpha = \omega^{e_0} \cdot c_0 + \cdots + \omega^{e_n} \cdot c_n.$$

2.3 Ordinalni prostori

Definicija 21. *(Topološki) ordinalni prostor ili prostor ordinala je par $(\alpha, \mathcal{T})$ gdje je α ordinal, a $\mathcal{T}$ uređajna topologija nad α.*

Teorem 22. *Ordinalni prostor $(\alpha, \mathcal{T})$ je raspršen.*

Dokaz. Neka je S (ne nužno otvoren) podskup ordinalnog prostora. Zbog dobre uređenosti ordinala, $m := \min S$ je dobro definiran.

Tada otvoren skup $[0, m+1\rangle$ iz S izolira točku (ordinal) m i samo nju. $\square$

3 Relacijska intepretacija i K_n stabla

Dokaz potpunosti u odnosu na topološku interpretaciju raspršenim prostorima koristi dokaz potpunosti u odnosu na relacijsku interpretaciju sustava **GL**(klasa inverzno dobro fundiranih tranzitivnih okvira).

Prisjetimo se iz uvoda da u relacijskoj semantici formule interpretiramo po "svjetovima" modela na klasičan način za logičke veznike, a $\Box F$ ($\Diamond F$) interpretiramo na način da u svakom (barem jednom) svijetu vidljivom iz trenutnog svijeta vrijedi F.

Sljedeća dva teorema daje osnovnu relacijsku semantiku (v. [1]).

Teorem 23. **GL** *je potpun u odnosu na klasu tranzitivnih inverzno dobro fundiranih okvira. Ta klasa okvira čini i adekvatnu semantiku za* **GL**.

Šumom nazivamo okvir (W, R) koji je tranzitivan, irefleksivan te vrijedi $r_1 R x \wedge r_2 R x \Rightarrow (r_1 R r_2 \vee r_2 R r_1)$, tj. putevi su jedinstveni do na tranzitivnost.

Stablo je šuma u kojoj postoji zajednički korijen svih (drugih) točaka.

Teorem 24. **GL** *je potpun u odnosu na klasu konačnih stabala.*

Ova tvrdnja slijedi iz metode stabala za **GL** (iz nezatvorenog se stabla može efektivno konstruirati model koji je protuprimjer danoj formuli).

Treba nam još jedna klasa okvira. Prije toga, jedna lema koju ćemo iskoristiti kako bismo povezali valjanost u toj klasi okvira i konačnim stablima. Odnos o kojem se govori u lemi je nalik bisimulaciji (više o njima u npr. [6]).

Pod **visinom** čvora x stabla T s korijenom r podrazumijevamo broj točaka na najduljem putu u T koji ne sadrži r osim kao početnu ili završnu točku. Dakle, najdulji put od x u smjeru "od" korijena.

Visinu čvora x u stablu T možemo označiti s $visina_T(x)$.

Lema 25. *Neka su* (W, R) *i* (W', R') *dva okvira. Neka je* f *funkcija s* W *u* W' *za koju vrijedi:*

- *f je surjekcija,*
- *za sve* $x_1, x_2 \in W$ *vrijedi:* $x_1 R x_2 \Rightarrow f(x_1) R' f(x_2)$ *i*
- *za sve* $x_1 \in W, y \in W'$ *vrijedi:* $f(x_1) R' y \Rightarrow (\exists x_2 \in W)(y = f(x_2) \wedge x_1 R x_2)$.

Tada vrijedi: $(W, R) \vDash \phi \Rightarrow (W', R') \vDash \phi$.

Dokaz. Pretpostavimo okvire i funkciju s danim svojstvima, te $(W, R) \vDash \phi$. Neka je V' odgovarajuća (proizvoljno fiksirana) relacija koja nadopunjuje okvir (W', R') do modela $\mathcal{M}'$.

Konstruiramo $\mathcal{M} = (W, R, V)$ s kojim ćemo, uz funkciju opisanu u lemi, pokazati da i u $\mathcal{M}'$ mora vrijediti ϕ. Zbog toga što je uvijek moguće konstruirati takav $\mathcal{M}$, slijedit će da $\mathcal{M}' \vDash \phi$ neovisno o V'.

Okvir (W, R) je već fiksiran, te uzimamo $wVp \iff f(w)V'p$.

Pokazujemo za svaku formulu F, induktivno po njenoj duljini, da za svaki $w \in W$ vrijedi: $\mathcal{M}, w \vDash F \Leftrightarrow \mathcal{M}', f(w) \vDash F$. Zbog čitljivosti ćemo umjesto $f(w)$ pisati w'.

- Ako $F = \bot$, isprazno jer $\bot$ nije ispunjiva.
- Ako $F = p$, tvrdnja je ekvivalentna načinu odabira V'.

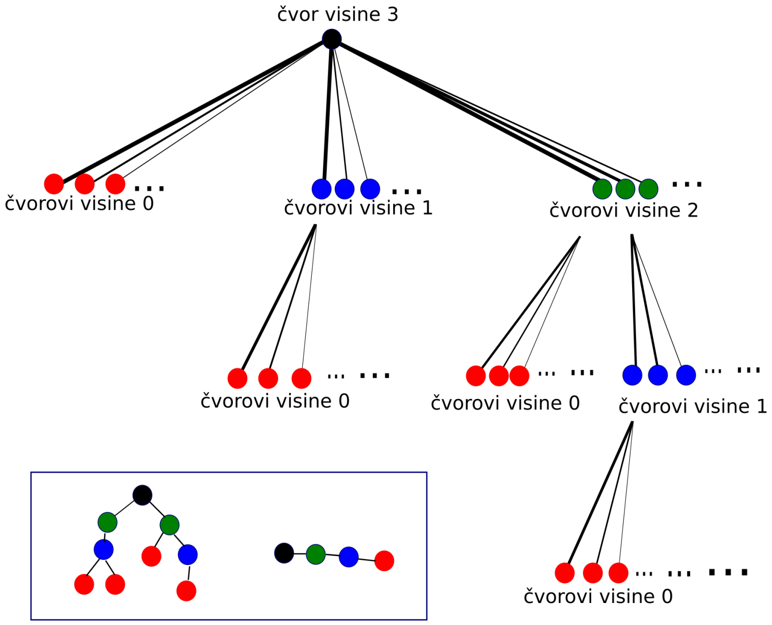
- Ako $F = (G \to H)$. Za dokaz kontrapozicijom pretpostavimo da $\mathcal{M}', w' \nvDash F$, pa imamo $\mathcal{M}', w' \nvDash (G \to \bot)$, H, odnosno $\mathcal{M}', w' \nvDash H$ i $\mathcal{M}', w' \vDash G$[3]. Zbog pretpostavke indukcije (koju smijemo koristiti jer $|G|, |H| < |F|$) imamo $\mathcal{M}, w \nvDash H$ i $\mathcal{M}, w \vDash G$, pa konačno $\mathcal{M}, w \nvDash F$. Druga strana dokaza, iz $\mathcal{M}, w \nvDash F$ prema $\mathcal{M}', w' \nvDash F$, ima simetričan dokaz (identičan uz zamjenu oznaka).

- Ako $F = \Box G$. Za prvi smjer kontrapozicijom pretpostavimo da $\mathcal{M}', w' \nvDash F$, pa imamo da za neki y iz W' za koji $w'Ry$ vrijedi $\mathcal{M}', y \nvDash G$. Iz svojstava funkcije f slijedi da postoji $x_2 \in W$ za koji vrijedi $y = f(x_2)$ te wRx_2. Iz pretpostavke indukcije imamo da $\mathcal{M}, x_2 \nvDash G$, no tada imamo da $\mathcal{M}, w \nvDash F$.

  Za drugi smjer, pretpostavimo $\mathcal{M}, w \nvDash F$. Neka je $x_2 \in W$ svijet za koji vrijedi wRx_2 te $\mathcal{M}, x_2 \nvDash G$. Iz drugog svojstva funkcije f imamo (prisjetimo se $w' = f(w)$) da zbog wRx_2 vrijedi $w'R'f(x_2)$. Zbog pretpostavke indukcije imamo $\mathcal{M}', f(x_2) \nvDash G$, pa onda i $\mathcal{M}', w' \nvDash F$,

Sad se vraćamo formuli ϕ. Iz upravo dokazane tvrdnje slijedi da ϕ vrijedi u svakoj točki iz $f(W)$, a kako je f surjekcija, imamo da ϕ vrijedi u W', tj. $\mathcal{M}' \vDash \phi$.
Kako je V' bio proizvoljan, imamo $(W', R') \vDash \phi$. □

Sad prelazimo na još jednu klasu okvira. Nju je Blass uveo kao pomoćnu za svoj dokaz potpunosti **GL** u odnosu na filtersku semantiku. Radi se o klasi $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.



Slika 1: Vizualizacija K_n, prebrojivo beskonačno širokog i konačno visokog stabla, za $n = 3$. Na slici su i dva konačna stabla, boje objašnjavaju preslikavanje u dokazu teorema o potpunosti **GL** u odnosu na klasu $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Prvo ćemo dati neformalniji opis strukture K_n. Radi se o u širini beskonačnom stablu dubine n koje možemo zamisliti kao nesavršenu reprezentaciju ordinala $\omega \cdot n$ na sljedeći način. Pod

[3] Zbog $\mathcal{M}', w' \vDash G$ u indukciji dokazujemo $\Leftrightarrow$ umjesto samo $\Rightarrow$. Bez toga ne bismo mogli zaključiti $\mathcal{M}, w \vDash G$.

odnosom "roditelj $\to$ dijete" zamišljamo odnos "skup $\to$ element skupa". Zatim, ako grupiramo djecu nekog čvora u klase ekvivalencije ovisno o visinama čvorova (kao na slici), onda je $(n+1)$. dijete unutar klase sljedbenik n. čvora iste klase. Tu je i prvo odstupanje od ordinala, jer bi trebala postojati veza $(n+1). \to n.$ (zbog $(n+1). = n. \cup \{n.\}$), a nje u K_n nema.

Fiksirajmo neki čvor s djecom. Ako gledamo prvo dijete prve klase po visini, ono predstavlja 0. Ako gledamo prvo dijete k. klase (i k. klasa nije početna), onda to dijete reprezentira granični ordinal koji je jednak skupu ordinala reprezentiranih $(k-1)$. klasom. Komentirajmo još nesavršenosti. Iako to zbog preglednosti nije istaknuto na slici, K_n je tranzitivno zatvoren. Imamo problem više različitih čvorova u stablu koji reprezentiraju isti ordinal. Primjerice, svako najlijevije dijete je prazan skup. Korijen (zbog tranzitivnog zatvorenja) stoga vidi više različitih praznih skupova. Što se same slike tiče, mogao bi biti dogovor da se skupovno jednaki elementi smatraju istima ali više puta nacrtanima. No kako ćemo vidjeti, takvi elementi se u K_n doista razlikuju. Možda najveće odstupanje je u činjenici da smatramo da su djeca nekog "ordinala" zapravo djeca prvog ordinala iz njegove klase. Prvo spomenuto odstupanje je poseban slučaj ovog odstupanja. Tamo smo imali da primjerice 1 ne sadrži 0, no to je zato što 1 mora imati istu djecu kao 0, a 0 ne sadrži djecu.

Definicija 26. *K_n je okvir (W, R) gdje vrijedi sljedeće:*

- *W je skup svih konačnih nizova koji su:*
  - *ili prazni (samo je jedan takav, $\langle\rangle$),*
  - *ili su oblika $\langle(i_0, j_0), \ldots, (i_k, j_k)\rangle$ gdje je $k \geq 0$, za prve članove parova vrijedi: $n > i_0 > \cdots > i_k >= 0$, a drugi članovi su proizvoljni.*

  Neki elementi iz W u K_{128}: $\langle(127, 1931)\rangle$, $\langle(127, 28), (63, 4), (1, 1906)\rangle$ i $\langle(127, 0), \ldots, (0, 127)\rangle$. Također i $\langle(3, 19)\rangle$ i $\langle\rangle$.

- *R je relacija za koju vrijedi sljedeće: $wRv \Leftrightarrow$ Postoji **neprazan** konačan niz ε takav da $v = w * \varepsilon$, gdje je $*$ operacija konkatenacije.*

  Primjeri relacijskih parova R iz K_3:
  - *$\langle\rangle Rw$ (za $w \in W$),*
  - *$\langle(2, 13)\rangle R \langle(2, 13), (1, 14)\rangle$,*
  - *$\langle(2, 13)\rangle R \langle(2, 13), (1, 14), (0, 15)\rangle$ i*
  - *$\langle(2, 13)\rangle R \langle(2, 13), (0, 15)\rangle$.*

  Iz definicije slijedi da je R tranzitivno zatvorena.

Teorem 27. **GL** *je potpun u odnosu na klasu okvira $\mathcal{K} = \{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Dokaz. Vidimo da je K_n inverzno dobro fundiran zbog konačne visine, a tranzitivnost je već komentirana (na slici zbog preglednosti nema tranzitivnih veza).

Stoga, jasno je da $\mathbf{GL} \vdash F \Rightarrow \mathcal{K} \models F$. No, ako $\mathbf{GL} \nvdash F$, slijedi li $\mathcal{K} \nvDash F$? Riječima, možemo li za svaku formulu koja nije teorem pronaći protuprimjer u obliku nekog K_n stabla?

Iz ranijeg teorema imamo da mora postojati konačno stablo $T_n = (W', R')$ (npr. visine n) koje čini protuprimjer F. Pokažimo da je i $K_n = (W, R)$ tada protuprimjer.

Definirajmo funkciju $f : W \to W'$ tako da vrijedi:

1. $visina_{K_n}(x) = visina_{T_n}(f(x))$,
2. $wRv \Rightarrow f(w)R'f(v)$ i

3. f je surjektivna.

Ovakvih funkcija ima (ne i neprebrojivo) puno, pogledajmo opis kako pronaći barem jednu takvu funkciju. Korijen r_K stabla K_n preslikamo u korijen T_n.

Sad promatramo K_n od vrha (tj. korijenske razine) prema dnu, svaku razinu zasebno[4] te slijeva na desno.

U nekom trenutku u tom postupku smo u točki x visine v koja je preslikana u $x' = f(x)$ (na početku smo preslikali samo korijen, ali od njega i krećemo). Promatramo djecu od x'. Odaberemo dijete d od x visine $visina_T(d')$ djetetu d' od x', za svako takvo dijete d'. Preostalu djecu x preslikamo po volji u dijete od x', s time da pazimo na uvjet (1). Time smo osigurali uvjet (3). Uvjet (2) je osiguran time što smo par djetetu d od x pronašli među djecom od x'.

Ovakva funkcija zadovoljava uvjete iz ranije leme. Prvi i drugi uvjet (f je surjekcija i za sve $x_1, x_2 \in W$ vrijedi: $x_1 R x_2 \Rightarrow f(x_1) R' f(x_2)$) su bili i uvjeti za odabir f.

Treći uvjet (leme, ne funkcije) bi se mogao učiniti problematičnim. Treći uvjet je bio da za sve $x_1 \in W, y \in W'$ vrijedi: $f(x_1) R' y \Rightarrow (\exists x_2 \in W)(y = f(x_2) \wedge x_1 R x_2)$. On također slijedi iz načina odabira f jer se traži barem jedan x_2 kakav je opisan. Naime, neki originali x_3 od y možda ne zadovoljavaju $x_1 R x_3$. Takvih će sigurno biti, jer osim točaka iz K_n koje čine ulaganje T_n u K_n, imamo i točke koje smo naprosto morali negdje preslikati. Primjerice, u stablu $a \to b \to c$, prvo dijete slijeva (u uobičajenom prikazu) iz K_2 će biti preslikano u c. Dijete K_2 koje je preslikano u b sigurno "ne vidi" taj c; ali bitno je da postoji barem jedno koje ga vidi.

Pozivanjem na lemu imamo da ako $\mathcal{M}' \nvDash \phi$, onda i $\mathcal{M} \nvDash \phi$, što smo i tražili. □

4 Adekvatnost topološke interpretacije

Slično relacijskoj semantici, (topološka) valjanost se definira preko klase "okvira" koji su sad topološki prostori umjesto usmjerenih grafova. Pojedini topološki model (dalje: model) je takav "okvir" združen s funkcijom valuacije.

Osnovno pitanje je kako preslikati formulu nekog sustava modalne logike u tvrdnju o modelu. Više je uobičajenih pristupa. Kao i u relacijskoj semantici, definira se istinitost svake formule u točki topološkog prostora modela o kojem je riječ. Istinitost formule u topološkom prostoru je istinitost u svim točkama tog prostora. U najčešćem pristupu (kojeg u nastavku nećemo definirati ni koristiti) istinitost formula oblika $\Diamond F$ odgovara topološkom zatvorenju točaka u kojima je istinita formula F.

Taj je (najčešći) pristup prihvatljiv za sustave koji su nadogradnja sustava **S4**. Radi se o sustavima koji mogu dokazati instance shema refleksivnosti ($\Box F \to F$) i tranzitivnosti ($\Box F \to \Box\Box F$). Instance tih shema su valjane u svim topološkim prostorima ako $\Diamond F$ odgovara topološkom zatvorenju točaka u kojima je istinita formula F. Stoga taj pristup nije prihvatljiv za **GL**, jer instance sheme $\Box F \to F$ nisu teoremi **GL** (ne bi postojao model koji je protuprimjer.)

Razmatramo samo tzv. normalne sustave modalne logike. U njima uvijek vrijedi da je formula F teorem ako i samo je formula F' teorem, gdje je F' nastala zamjenom podformula oblika $\Box G$ s $\neg\Diamond\neg G$. Može se pokazati da u spomenutom pristupu topološkoj interpretaciji vrijedi da je skup točaka u kojima je istinito $\Box F$ jednak unutrašnjosti skupa točaka u kojima je istinito F.

Mi ćemo se baviti drugim čestim pristupom, u kojem se pokazuje da je skup točaka u kojima je istinita formula oblika $\Diamond F$ jednak derivatu (definicija 8) skupa točaka u kojima vrijedi F.

S obzirom da nas zanima samo istinitost u svim točkama, pojam istinitosti formule u točki prostora moguće je zaobići. Naime, možemo definirati operaciju koja će rekurzivno po strukturi formule graditi jedan skup točaka. Ako ta operacija nad danom formulom za $(X, \mathcal{T})$ izgradi

[4] U govoru o razinama, visinama itd. iz jasnih razloga zanemarujemo tranzitivne veze.

cijeli skup X, formula je istinita (inače nije). Dakle formule možemo "čitati" i kao da denotiraju podskupove topološkog prostora.

Definicija 28. *(Topološki) model $\mathcal{M}$ je par $((X,\mathcal{T}),V)$ gdje je $(X,\ \mathcal{T})$ topološki prostor, a $V \subseteq X \times prop$.*

Koristit ćemo definiciju istine po točkama modela, jer je tako uobičajenije u literaturi.

Definicija 29. *Neka je dan $\mathcal{M}$ i $w \in X$. Tada rekurzivno definiramo:*

- *Ako $F = \bot$, tada $w \nvDash F$*
- *Ako $F = p$, tada $w \vDash F$ ako i samo ako wVp*
- *Ako $F = (G \to H)$, tada $w \vDash F$ ako i samo ako vrijedi: $w \nvDash G$ ili $w \vDash H$*
- *Ako $F = \Diamond G$, tada $w \vDash F$ ako i samo ako $\left(\forall O \overset{\ni\, w}{\underset{\in\, \mathcal{T}}{}}\right)(\exists y \in O \setminus \{w\})(y \vDash G)$*

Pročitajmo uvjet u posljednjoj točki: "Svi otvoreni podskupi koji sadrže w, sadrže i još neku točku y u kojoj vrijedi G". Podsjetimo da bi ovaj uvjet trebao biti ispunjen u točkama koje se derivat skupa kojeg čine točke u kojima vrijedi G. Drugim riječima, da bi točka bila u tom derivatu, u svakoj se njenoj okolini mora nalaziti neka točka u kojoj vrijedi G. Spomenimo još da ako je X ordinal, točke koje nisu granični ordinali imaju otvoren skup koji sadrži samo njih; stoga u njima ni ne može vrijediti formula oblika $\Diamond G$.

Ostale logičke veznike shvaćamo kao uobičajene pokrate, a uvjet za $\Box$ dobivamo na dobro poznat način $w \vDash \Box F$ akko $w \vDash \neg\Diamond\neg F$.

Napomena 30. *Slično kao u relacijskoj semantici, ako neka formula vrijedi za sve modele nad nekim topološkim prostorom, reći ćemo da vrijedi i u samom topološkom prostoru. Ako neka formula vrijedi u svim prostorima, reći ćemo da je valjana.*

4.1 Sustav wK4

Definicija 31. *Sustav* **wK4** *je najmanji skup formula sa sljedećim svojstvima:*

- *Sadrži sve tautologije propozicijske logike,*
- *Za formule F, G vrijedi $\Box(F \to G) \to (\Box F \to \Box G) \in$* **wK4**. *(shema aksioma K)*
- *Za formulu F vrijedi $F \to (\Box F \to \Box\Box F) \in$* **wK4**. *(shema aksioma w4)*
- *Za formule $F, (F \to G) \in$* **wK4**, *vrijedi $G \in$* **wK4**. *(zatvorenje modus ponensom)*
- *Za formulu $F \in$* **wK4**, *vrijedi $\Box F \in$* **wK4**. *(zatvorenje nužnošću)*

Radi se o još jednom sustavu (normalne) modalne logike. Primijetimo da se od **GL** razlikuje dodavanjem sheme $w4$ umjesto G. Objasnimo prvo naziv **wK4**.[5] U relacijskoj semantici shema 4 ($\Box F \to \Box\Box F$) odgovara tranzitivnim okvirima. Točnije, okvir, odnosno njegova relacija dostiživosti, je tranzitivan ako i samo ako je ta formula valjana na tom okviru.

U relacijskoj semantici shema **wK4** odgovara klasi slabo tranzitivnih okvira. Slaba tranzitivnost je uvjet sličan uobičajenoj tranzitivnosti, s iznimkom što nikad ne tražimo refleksivne parove u relaciji. Primjerice, u nekoj relaciji R mogli bismo imati aRb i bRa. Ako je ta relacija tranzitivna mora vrijediti aRa (i bRb), no ako je slabo tranzitivna, ne mora.

[5] K je minimalni sustav normalne modalne logike, ponekad se dodaje kraticama sustava normalne modalne logike (poput **K4**), ponekad ne (poput **GL**). Dakle, trebamo objasniti w i 4 dijelove kratice.

Definicija 32. *Relacija R je* slabo tranzitivna *akko vrijedi*

$$\forall x \forall y \forall z (xRy \to (yRz \to (xRz \lor x = z))).$$

Napomena 33. *Preformulirajmo shemu $w4$ ovako:*

$$\Diamond\Diamond F \to (\Diamond F \lor F).$$

Pretpostavimo da u nekom okviru imamo da $wRvRw$. Ako je u dva "skoka" iz w dostupan svijet u kojem vrijedi F tražimo da je svijet u kojem vrijedi F dostupan u jednom skoku (slično kao kod tranzitivnosti) ili da u w vrijedi F. Ako se radi o istom svjetu (kao u primjeru), vrijedit će F te u tom slučaju ne mora biti tranzitivne veze.

Teorem 34. *Topološka semantika je adekvatna za* **wK4***, tj. ako je $(X, \mathcal{T})$ neki topološki prostor i F neki teorem sustava* **wK4***, tada vrijedi $(X, \mathcal{T}) \models F$.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ neki topoloski prostor. Dokazat ćemo da u proizvoljnoj točki $w \in X$ vrijedi svaki **wK4** teorem.

Prvo primijetimo da su tautologije propozicijske logike istinite jer je definicija istine za propozicijske izraze klasična. Iz istog razloga imamo zatvorenost modus ponensom.

Zatvorenje nužnošću. Pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{M} \models F$. Želimo pokazati (koristimo definiciju istine i redom navodimo ekvivalentne tvrdnje):

$$\begin{aligned}
&w \vDash \Box F \\
&w \vDash \neg\Diamond\neg F \\
&w \vDash \neg \left(\forall O \substack{\ni w \\ \in \mathcal{T}}\right) (\exists y \in O \setminus \{w\})(y \vDash \neg F) \\
&w \vDash \left(\exists O \substack{\ni w \\ \in \mathcal{T}}\right) (\forall y \in O \setminus \{w\})(y \vDash F).
\end{aligned}$$

Neka je O_w proizvoljan skup koji sadrži w. Ako postoji $y \in O_w \setminus \{w\}$, zbog $\mathcal{M} \vDash F$ sigurno vrijedi $y \vDash F$. Ako takav y ne postoji, uvjet očito vrijedi.

Shema K. Preformulirajmo shemu K na sljedeći način: $\Diamond G \to (\neg\Diamond F \to \Diamond(G \land \neg F))$

Pretpostavimo $w \vDash \Diamond G$ i $w \vDash \neg\Diamond F$. Imamo tada:

$$\left(\forall O \substack{\ni w \\ \in \mathcal{T}}\right) (\exists x \in O \setminus \{w\})(x \vDash G) \tag{1}$$

$$\left(\exists U \substack{\ni w \\ \in \mathcal{T}}\right) (\forall y \in U \setminus \{w\})(y \vDash \neg F) \tag{2}$$

i treba pokazati da vrijedi:

$$\left(\forall E \substack{\ni w \\ \in \mathcal{T}}\right) (\exists z \in E \setminus \{w\})(z \vDash G \land \neg F). \tag{3}$$

Uzmimo $E \in \mathcal{T}$ takav da $w \in E$. Označimo s U_0 otvoreni skup kojeg garantira (2). $w \in U_0 \in \mathcal{T}$ pa iz (1) slijedi $(\exists x \in U_0 \setminus \{w\})(x \vDash G)$. Označimo takav x s x_0. Dakle, $x_0 \vDash G$.

Zbog $x_0 \in U_0 \setminus \{w\}$, iz (2) slijedi $x_0 \vDash \neg F$. Sad imamo $x_0 \vDash G \land \neg F$.

Za proizvoljan otvoreni skup E koji sadrži w pronašli smo $z = x_0$ takav da $z \vDash G \land \neg F$.

Shema $w4$. Preformulirajmo shemu $w4$ na sljedeći način: $\Diamond\Diamond F \to (\neg\Diamond F \to F)$

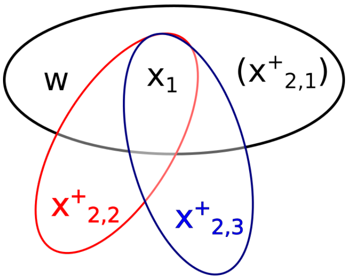
Pretpostavimo $w \vDash \Diamond\Diamond F$ i $w \vDash \neg\Diamond F$. Imamo tada:

$$\left(\forall O_1 \substack{\ni w \\ \in \mathcal{T}}\right) (\exists x_1 \in O_1 \setminus \{w\}) \left(\forall O_2 \substack{\ni x_1 \\ \in \mathcal{T}}\right) (\exists x_2 \in O_2 \setminus \{x_1\})(x_2 \vDash F) \tag{1}$$

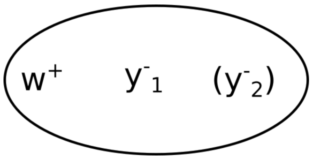
$$\left(\exists U \substack{\ni w \\ \in \mathcal{T}}\right) (\forall y \in U \setminus \{w\})(y \vDash \neg F) \tag{2}$$

i treba pokazati da vrijedi:

$$w \vDash F. \tag{3}$$



Slika 2: Uvjet (1). Proizvoljan otvoren skup $O_1 \ni w$ reprezentiran je crnim skupom. Crni, plavi i crveni skup su neki mogući otvoreni skupovi koji sadrže x_1. U njima se nalaze točke $x_{2,i}$ u kojima vrijedi F.



Slika 3: Crni skup smo fiksirali na otvoreni skup o kojem govori uvjet (2). Kad u obzir uzmemo (1), mora vrijediti $w \vDash F$.

Uvjet (1) možemo zamisliti kao na slici. Plus (minus) predstavlja garanciju da u danoj točki vrijedi (ne vrijedi) F. Točke u zagradama mogu i ne moraju postojati. Na prvoj slici, moguće je da je $w = (x^{+}_{2,1})$. Štoviše, kako pokazuje druga slika, to i mora vrijediti.

Provedimo dokaz formalnije. Neka je U_0 otvoren skup čije postojanje garantira (2). $w \in U_0 \in \mathcal{T}$ pa $(\exists x_1 \in U_0 \setminus \{w\}) \left(\forall O_2 \substack{\ni x_1 \\ \in \mathcal{T}}\right) (\exists x_2 \in O_2 \setminus \{x_1\})(x_2 \vDash F)$. Stoga za neki u_1 takav da $u_1 \in U_0 \setminus \{w\}$ vrijedi $\left(\forall O_2 \substack{\ni u_1 \\ \in \mathcal{T}}\right) (\exists x_2 \in O_2 \setminus \{u_1\})(x_2 \vDash F)$. Vrijedi $u_1 \in U_0$, pa imamo i $(\exists x_2 \in U_0 \setminus \{u_1\})(x_2 \vDash F)$. Dakle za neki $u_2 \in U_0 \setminus \{u_1\}$ vrijedi $u_2 \vDash F$.

Zbog načina odabira U_0, znamo da za sve njegove elemente y osim možda za $y = w$ vrijedi $y \vDash \neg F$. Stoga jedino preostaje $u_2 = w$. Ali $u_2 \vDash F$, pa $w \vDash F$. □

Dokaz da je **wK4** potpun u odnosu na klasu svih topoloških prostora oslanja se na relacijsku semantiku. Pokazuje se da postoji 1-na-1 korespondencija između *konačnih* topoloških prostora i specijalne podklase konačnih slabo tranzitivnih relacijskih okvira u odnosu na koju je **wK4** također potpun. Taj se dokaz može pogledati u [7].

4.2 Sustav GL

Prisjetimo se da je topološki prostor raspršen ako za svaki neprazan podskup možemo pronaći neki otvoreni skup koji će izolirati neku njegovu točku.

Formalnije, $(X, \mathcal{T})$ je raspršen ako: $\left(\forall S \substack{\supset \emptyset \\ \subseteq X}\right) (\exists O \in \mathcal{T})(\exists t \in S)(S \cap O = \{t\})$.

Teorem 35. *Ako je $(X, \mathcal{T})$ neki raspršen topološki prostor i F neki teorem sustava* **GL**, *tada vrijedi $(X, \mathcal{T}) \models F$.*

Dokaz. Ranije smo pokazali da je topološka semantika adekvatna za **wK4**.

Ovdje ćemo dokazati preostali slučaj, naime da je shema G istinita u svakoj točki svakog modela čiji je pripadni "okvir" neki raspršen topološki prostor.

Prvo preformulirajmo shemu G, $\Box(\Box F \to F) \to \Box F$, na sljedeći način:

$$\Diamond F \to \Diamond(\neg\Diamond F \wedge F).$$

Imamo sljedeće pretpostavke:

$$\left(\forall U \substack{\ni w \\ \in \mathcal{T}}\right)(\exists x \in U \setminus \{w\})(x \vDash F) \tag{1}$$

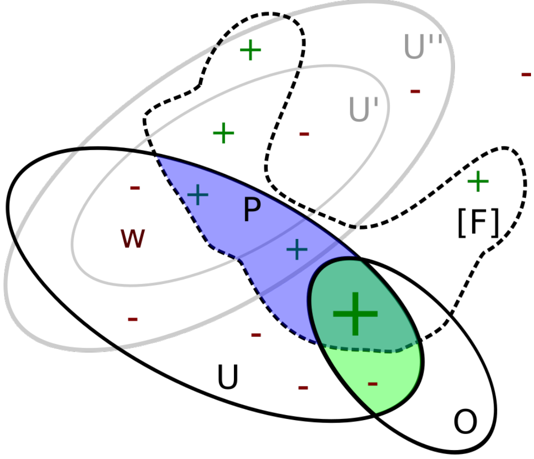
$$\left(\forall S \substack{\supset \emptyset \\ \subseteq X}\right)(\exists O \in \mathcal{T})(\exists t \in S)(S \cap O = \{t\}) \tag{2}$$

i trebamo dobiti:

$$\left(\forall A \substack{\ni w \\ \in \mathcal{T}}\right)(\exists y \in A \setminus \{w\})\Big[y \vDash F \wedge \left(\exists E \substack{\ni y \\ \in \mathcal{T}}\right)(\forall u \in E \setminus \{y\})(u \vDash \neg F)\Big]. \tag{3}$$

Koristimo prilagođenu ideju iz "algebarskog" dokaza u [8]. Dokaz je prikazan na slici (dolje).

Iz prve formule imamo da svaki otvoreni skup U koji sadrži w, sadrži i (drugu) točku t_1 u kojoj vrijedi F. Presjek P između proizvoljnog takvog U i skupa svih točaka u kojima vrijedi F sadrži barem t_1. Iz druge formule, postoji neki otvoreni skup O koji u presjeku s P izolira neku točku t_2 (možda $= t_1$), tj. $O \cap P = \{t_2\}$. $t_2 \vDash F$. Ako $t_2 \vDash \neg\Diamond F$, gotovi smo ($y$ iz treće formule je ovako odabran $t2$). Pretpostavimo da je u otvorenom skupu $U \cap O$ neka druga točke x (osim t_2) u kojoj vrijedi F. Tada je x u skupu točaka u kojima vrijedi F, te stoga i u skupu P. No, otvoreni skup O izolira samo točku t_2 iz P, tj. $x \notin P$, kontradikcija.



Slika 4: Na ovoj slici sva su *konveksna* područja koja su potpuno unutar punih linija otvoreni skupovi. Skupovi U, U' i U'' su proizvoljne okoline točke w. Zbog tvrdnje (1), u svakoj okolini postoje točke u kojima vrijedi F. Na slici su označene s +. Točke u kojima ne vrijedi F označene su s -. Skup $[F]$ (nepravilnog oblika i iscrtkan) je skup točaka u kojima vrijedi F. On nije nužno otvoren pa nije nacrtan punom linijom. Presjek P (označen plavom bojom) između $[F]$ i U također možda nije otvoren skup. Zbog tvrdnje (2), postoji otvoren skup O koji u presjeku s P ima točno jednu točku (i u njoj vrijedi F), na slici označenu velikim zelenim plusom. Ono što je bitno za tvrdnju (3) je da nema drugih točaka u kojima vrijedi F (pluseva) unutar $U \cap O$. Naime, sve druge točke (ako ih ima) u $U \cap O$ su izvan $[F]$, pa u njima mora vrijediti $\neg F$.

□

5 Potpunost u odnosu na topološku interpretaciju

5.1 Filteri

Osnovni cilj je dati dokaz potpunosti **GL** u odnosu na topološki prostor $(\omega^\omega, \mathcal{T})$ gdje je topologija uređajna. Slijedimo izlaganje u [3]. U spomenutom je radu posve izbjegnut termin "topologija"; gradi se interpretacija pomoću filtera. Kasnije ćemo pokazati vezu filtera i topoloških prostora, odnosno Blassovog rezultata i spomenutog rezultata potpunosti.[6]

Definicija 36. *Filter F nad skupom X je neprazna familija podskupova od X za koju vrijedi:*

- *Za $S, P \in F$ vrijedi $S \cap P \in F$. (zatvorenost na konačne presjeke)*
- *Za $S \in F$ i $P \supset S$ vrijedi $P \cap X \in F$. (zatvorenost na nadskupe)*

Napomena 37. *Primijetimo neka osnovna svojstva filtera:*

- *Zbog nepraznosti filtera te zatvorenosti na nadskupe, za filter F nad X vrijedi $X \in F$.*
- *Ako $\emptyset \in F$ onda $F = \mathcal{P}(X)$. Takve filtere nazivamo **nepravima**.*
- *Za bilo koji filter F nad X par $(X, F \cup \{\emptyset\})$ je topološki prostor. Naime, uvjet proizvoljnih unija kod topoloških prostora je (i više nego) zadovoljen uvjetom zatvorenja na nadskupe kod filtera. Uvjet zatvorenja na konačne presjeke je zadovoljen identičnim uvjetom.*
- *Za topološki prostor (X, F), F gotovo nikad nije (zanimljiv) filter za X. Za svaku topologiju $\mathcal{T}$ vrijedi $\emptyset \in \mathcal{T}$. Tada je F filter ako i samo ako je F diskretna topologija, odnosno ako i samo ako je F nepravi filter.*

  Za topološki prostor (X, F), $F \setminus \{\emptyset\}$ je ponekad filter za X. O toj situaciji govori prethodna točka.
- *Ako filter sadrži disjunktne skupove, tada sadrži i prazan skup pa je neprav. Moglo bi se stoga učiniti da je filter F neprav ako i samo ako postoji neki njegov podskup $F' \subseteq F$ čiji je presjek prazan skup. No to ipak ne vrijedi; sljedeći filter je protuprimjer.*

  $$F_{kofinitni} = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(n \in S)\}$$

  Lako je vidjeti da $\bigcap F_{kofinitni} = \emptyset$, ali $F_{kofinitni}$ ne sadrži prazan skup te stoga nije neprav.

Ultrafilter je pravi filter koji se ne može proširiti i pritom ostati pravi filter.

Definicija 38. *Glavni ultrafilter F_a je filter nad skupom X ako vrijedi:*

$$F_a = \{S \subset X | S \ni a\}.$$

U slučaju konačnih skupova, svi ultrafilteri su glavni ultrafilteri. Postoje ultrafilteri koji nisu glavni ultrafilteri.

[6] Do istog je rezultata došao i Abashidze, u članku koji se čini nedostupnim.

Definicija 39. *Filter završetaka $\mathcal{E}$ (eng. end-segment filter) parcijalno uređenog skupa X je (najmanji) filter koji za svaki $x \in X$ sadrži $\{M \in X \mid M > x\}$. Odnosno koji je proširenje skupa*

$$B = \big\{\{M \in X \mid M > x\} \mid x \in X\big\}.$$

Ako je $\mathcal{E}$ filter završetaka nad X, označavamo $\mathcal{E}_X = \mathcal{E}$.

Primijetimo da gornja definicija eksplicitno spominje samo kako izgledaju elementi "podbaze" za jedan filter. Da bi se dobio filter moramo takav skup zatvoriti na nadskupe i konačne presjeke. U slučaju $(\mathbb{N}, <)$ imamo da se kofinitni filter poklapa s $\mathcal{E}$. U slučaju dovoljno velikog početnog komada klase ordinala nemamo analogno poklapanje. Ako fiksiramo proizvoljni granični ordinal α, $\mathcal{E}_\alpha$ za razliku od $\mathcal{E}_\omega$ sadržava i koinfinitne skupove.

Definicija 40. *Skup S je pozitivan za filter F ako nije disjunktan niti s jednim elementom iz F.*

Propozicija 41. *Za F postoji pozitivan skup ako i samo ako je F pravi filter.*

Dokaz. Neka je F filter nad X. Ako je F pravi filter, X je primjer skupa koji je za njega pozitivan. Ako F nije pravi filter, svaki skup je disjunktan s njegovim elementom $\emptyset$, pa za F nema pozitivnih skupova. □

Ako je F pravi filter, onda je i bilo koji element f filtra F pozitivan za F. Kad ne bi bio, to bi značilo da je f disjunktan s $g \in F$, no tada $f \cap g = \emptyset \in F$, pa je F nepravi.

Definicija 42. *Klasa (skup) K je* kofinalna za ordinal *α ako* ***strogo*** *između svakog ordinala manjeg od α i samog α postoji barem jedan ordinal iz K.*

Napomena 43. *Pogledajmo primjere skupova kofinalnih za sljedeće ordinale:*

- *Ordinal 0: bilo koji skup, jer ne postoji ordinal manji od 0.*
- *Ordinal $1 \leq k < \omega$: nijedan skup, jer između $k-1$ i k ne postoji nijedan ordinal.*
- *Bilo koji ordinal prve vrste (koji ima neposrednog prethodnika) α: nijedan skup, iz istog razloga kao u prethodnoj točki.*
- *Ordinal ω: bilo koji neograničen skup prirodnih brojeva.*
- *Bilo koji ordinal druge vrste (granični) α: Bilo koji skup čiji je supremum α. Npr. skup $\{\omega \cdot 2, \omega \cdot 4, \omega \cdot 8, \ldots\}$ je kofinalan za $\alpha = \omega^2$.*

Vidljivo je da su u definiciji filtera završetaka i pojma skupa kofinalnog za neki ordinal korištene slične motivacije. Vrijedi da je S pozitivan za $\mathcal{E}_\alpha$ ako i samo ako je S kofinalan za α.

Lema 44. *$\mathcal{E}_\alpha$ je pravi filter ako i samo ako je α granični ordinal.*

Dokaz. Ova lema je izravna posljedica tvrdnji:

- veze postojanja pozitivnog skupa za filter i toga je li on pravi filter (propozicija 41),
- činjenice da je skup pozitivan za filter završetaka nekog ordinala ako i samo ako je kofinalan za taj ordinal i
- činjenice da skup može biti kofinalan samo za graničan ordinali ili 0. No, $\mathcal{E}_0$ ($=\mathcal{E}_\emptyset$) sadrži samo prazan skup, pa nije pravi filter.

Druge dvije tvrdnje obrazložene su u prethodnoj napomeni. □

5.2 Adekvatnost filterske interpretacije

Sad ćemo definirati još jednu interpretaciju sustava modalne logike, ovaj put uz pomoć filtera. Radi se zapravo o specifičnoj filterskoj interpretaciji izgrađenoj pomoću filtera završetaka i ordinala (Blass definira interpretacije i uz pomoć drugih tipova filtera), no samo nam takva ovdje treba.

Definicija 45. *Filterski model (ako je jednoznačno, samo model) je uređeni par $\mathcal{M} = (\xi, V)$, gdje je:*

- *ξ ordinal veći od 0. Definiramo $\mathcal{F}$, familiju filtera indeksiranih elementima manjim od ξ.*

  Pritom je $F_\alpha \in \mathcal{F}$ upravo $\mathcal{E}_\alpha$, tj. filter završetaka za ordinal kojim je sam filter indeksiran. Stoga ćemo i pisati $\mathcal{E}_\alpha$ umjesto F_α.

- *V je relacija valuacije između ordinala manjih od ξ i skupa propozicijskih slova. Ako $\alpha V p$ pisat ćemo i $\alpha \vDash p$.*

  Valuaciju rekurzivno širimo na skup svih formula:

  - *Ako $F = \bot$, tada $\alpha \nvDash F$.*
  - *Ako $F = (G \to H)$, tada $\alpha \vDash F$ ako i samo ako vrijedi: $\alpha \nvDash G$ ili $\alpha \vDash H$.*
  - *Ako $F = \Diamond G$, tada $\alpha \vDash F$ ako i samo ako $(\forall S \in \mathcal{E}_\alpha)(\exists \gamma \in S)(\gamma \vDash G)$.*

Klasično, pišemo $\mathcal{M} \vDash F$ kad u svim ordinalima $\alpha \in \xi$ vrijedi $\alpha \vDash F$.

Slično kao i kod relacijske i topološke semantike, ako neka formula vrijedi u svim ordinalima svih modela oblika (ξ, V), reći ćemo i da F vrijedi u ξ. Ako formula vrijedi u svim ordinalima, reći ćemo da je valjana.

Napomena 46 (O definiciji istine u filterskom modelu)**.** *Prvo spomenimo kako izgleda uvjet istine za $F = \Box G$. $\alpha \vDash F$ ako i samo ako $(\exists S \in \mathcal{E}_\alpha)(\forall \beta \in S)(\beta \vDash G)$.*

Blass u [3] daje definiciju istine koja V modelira kao funkciju koja preslikava formulu u skup ordinala. Poveznica s našom definicijom je $v_{blass}(F) = \{\alpha \in \xi \mid \alpha \vDash F\}$.

Ovdje je ta definicija preformulirana kako bi bila u skladu s ostalim definicijama u radu; naime do sada smo uvijek definirali istinu "po točkama".

No, Blassova izvorna verzija je donekle ljepše formulirana. Početak je pridruživanje odabranih podskupova ξ svakoj propozicijskoj formuli. Dalje definiramo rekurzivno:

- *$V(\bot) = \emptyset$.*
- *$V(G \to H) = V(G)^C \cup V(H)$.*
- *$V(\Diamond G) = \{\alpha \in \xi \mid V(G)$ je pozitivan za $\mathcal{E}_\alpha\}$.*
- *(te se izvodi:) $V(\Box G) = \{\alpha \in \xi \mid V(G) \cap \alpha \in \mathcal{E}_\alpha\}$.*

Primijetimo još i kako je definicija istine (prva verzija) vrlo nalik definiciji istine u topološkom modelu. "Topološki" uvjet za $w \vDash \Diamond G$ je bio, otprilike, "u svakom otvorenom skupu koji sadrži w, u nekoj točki u vrijedi $u \vDash G$". "Filterski" uvjet za $\alpha \vDash \Diamond G$ je "u svakom završetku iz $\mathcal{E}_\alpha$, za neki ordinal $\beta \in \mathcal{E}_\alpha$ vrijedi $\beta \vDash G$".

Teorem 47. *Filterska semantika je adekvatna za* **GL***, tj. ako je (ξ, V) neki filterski model i F neki teorem sustava* **GL***, tada vrijedi $(\xi, V) \models F$.*

Dokaz. Dokazat ćemo da u proizvoljnom ordinalu $\alpha \in \xi$ proizvoljnog modela $\mathcal{M}$ vrijedi svaki **GL** teorem.

Prvo primijetimo da su tautologije propozicijske logike istinite jer je definicija istine za propozicijske izraze klasična. Iz istog razloga imamo zatvorenost modus ponensom.

Zatvorenje nužnošću. Pretpostavimo da je F valjana.

Želimo pokazati (koristimo definiciju istine i navodimo ekvivalentne tvrdnje):

$$\begin{aligned}
&\alpha \vDash \Box F \\
&\alpha \vDash (\exists S \in \mathcal{E}_\alpha)(\forall \beta \in S)(\beta \vDash F)
\end{aligned}$$

Neka je S proizvoljan završetak iz $\mathcal{E}_\alpha$. Takav završetak mora postojati (sjetimo se da je filter uvijek neprazan). Tada za proizvoljan β iz S sigurno vrijedi $\beta \vDash F$ (F je valjana pa posebno i $\beta \vDash F$).

Shema K. Preformulirajmo shemu K na sljedeći način: $\Diamond G \to (\neg\Diamond F \to \Diamond(G \wedge \neg F))$

Pretpostavimo $\alpha \vDash \Diamond G$ i $\alpha \vDash \neg\Diamond F$. Imamo tada:

$$(\exists S \in \mathcal{E}_\alpha)(\forall \beta \in S)(\beta \vDash \neg F) \tag{1}$$

$$(\forall S' \in \mathcal{E}_\alpha)(\exists \beta' \in S')(\beta' \vDash G) \tag{2}$$

i treba pokazati da vrijedi:

$$(\forall E \in \mathcal{E}_\alpha)(\exists \gamma \in E)(\gamma \vDash G \wedge \neg F). \tag{3}$$

Dokaz je posve ekvivalentan analognom dokazu da K vrijedi u topološkim prostorima; kako se dokaz ne poziva ni na koje specifično svojstvo filtera, preskačemo njegovo raspisivanje.

Shema G. Prvo preformulirajmo shemu G, $\Box(\Box F \to F) \to \Box F$, na sljedeći način:

$$\Diamond F \to \Diamond(\neg\Diamond F \wedge F).$$

Pod sljedećom pretpostavkom

$$(\forall S \in \mathcal{E}_\alpha)(\exists \beta \in S)(\beta \vDash F) \tag{1}$$

trebamo dobiti:

$$(\forall A \in \mathcal{E}_\alpha)(\exists \gamma \in A)\Big[\gamma \vDash F \wedge (\exists B \in \mathcal{E}_\gamma)(\forall \delta \in B)(\delta \vDash \neg F)\Big]. \tag{2}$$

Ukažimo prvo na to da zbog pretpostavke (1) ordinal α mora biti graničan. Naime, zbog leme 44, imamo da filter završetaka ordinala koji nije graničan sadrži prazan skup. No prazan skup ne sadrži nikakav element β, pa posebno ni takav da $\beta \vDash F$.

Osnovna ideja dokaza je pronaći, za svaki završetak iz $\mathcal{E}_\alpha$, ordinal γ u kojem vrijedi F te čiji filter $\mathcal{E}_\gamma$ sadrži prazan skup. Tako ćemo na najjednostavniji način (s $B = \emptyset$) ispuniti drugi konjunkt iz (2).

Prisjetimo se da su ordinali dobro uređeni skupovi pa ima smisla govoriti o prvom ordinalu koji zadovoljava neko svojstvo. Ako nas zanima neki element x nekog skupa tada bilo koji filter, pa tako i filter završetaka, zbog zatvorenosti na nadskupe sadrži skup (završetak) koji sadrži x. To ćemo iskoristiti kako bismo opravdali postojanje završetka u filteru koji sadrži prvi ordinal koji zadovoljava određeno svojstvo.

Sad dokazujemo istinitost formule (2). Odaberimo proizvoljan $A \in \mathcal{E}_\alpha$. Stavljamo $\gamma := \min\{\lambda \in A | \lambda \vDash F\}$. γ je dobro definirana jer je skup u zagradama neprazan i podskup (podskupa) dobro uređenog skupa (te stoga i sam dobro uređen).

Skup $\mathcal{E}_\gamma$ je neprazan (jer je filter), fiksiramo proizvoljan njegov element B. Pretpostavimo da $B \ni \delta_0 \models F$, pa $\gamma \leq \delta_0$, no iz odabira γ slijedi $\delta_0 \leq \gamma$. Zbog ranije propozicije o linearnom uređaju na klasi ordinala, slijedilo bi $\delta_0 = \gamma$. No to je nemoguće jer $\delta_0 \in B \subseteq \gamma$, pa je $\delta_0 < \gamma$. Stoga u svakom ordinalu δ iz B mora vrijediti $\neg F$. Time smo dokazali (2). $\square$

Napomena 48. *Prethodni dokaz bi bio jednolinijski da smo (već sada) iskoristili vezu* filterskog *modela te raspršenih topoloških modela. Tada bismo se mogli pozvati na teorem 22 o vezi ordinalnih i raspršenih topoloških prostora. No ovakav dokaz, iako je dulji, možda daje bolje intuicije o tome zašto je G valjana formula u klasi filterskih modela.*

Korolar 49. $\Diamond\Diamond F \to \Diamond F$ *je valjana shema formula u filterskoj semantici.*

5.3 Potpunost u odnosu na filtersku interpretacije

Kako bi pokazali potpunost **GL** u odnosu na filtersku semantiku, tj. da valjanost na klasi svih filterskih modela povlači dokazivost, pokazat ćemo da za svaku formulu oborivu u filterskoj semantici postoji neki K_n model (v. definiciju 26) u kojem je ista ta formula neistinita (u korijenu modela).

Teorem 50. *Neka je ξ ordinal veći ili jednak ω^ω.*

Neka je zadan niz funkcija $\Gamma_n : K_n \to \mathcal{P}(\xi)$. Preciznije, za svako beskonačno stablo $K_n = (W, R)$, funkcija pridružuje svakom čvoru iz W neki podskup iz ξ.

Neka za niz $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vrijedi i sljedeće, za svaki $i \in \mathbb{N}$:

1. $\Gamma_i(\langle\rangle) \neq \emptyset$,
2. $x \neq y$ *povlači da su* $\Gamma_i(x)$ *i* $\Gamma_i(y)$ *disjunktni,*
3. *ako yRx te nema drugih čvorova između y i x, te $\alpha \in \Gamma_i(y)$, tada je skup $\Gamma_i(x)$ pozitivan za $\mathcal{E}_\alpha$.*
4. *za svaki ordinal $\alpha \in \Gamma_i(y)$ vrijedi da se unija skupova ordinala $\Gamma_i(x)$ svih čvorova nasljednika x od y (yRx) nalazi u filteru završetaka y,[7] tj. za neki $\beta < \alpha$, unutar Γ_i skupova nasljednika će postojati svi ordinali između β i α.*

Tada iz $\xi \models F$ *slijedi* **GL** $\vdash F$.

Dokaz. Spomenimo da niz $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ koji zadovoljava tražena svojstva postoji i o tome govori idući teorem.

Zbog disjunktnog pridruživanja ordinala točkama stabla (2. uvjet) možemo svakom ordinalu $\alpha \in \xi$ jedinstveno pridružiti njegov čvor; to pridruživanje označimo s $cvor(\alpha)$.

Fiksiramo formulu N koja nije teorem. Iz teorema 27 znamo da tada postoji n za koji $K_n = (W, R_K) \not\models N$ zbog nekog modela $\mathcal{M}_\mathcal{K} = (W, R_K, V_K)$ za koji u (bsomp) korijenu $W \ni w_0 \not\models N$. Fiksirajmo najmanji takav n. U nastavku će trebati samo Γ_n, pa stavimo $\Gamma := \Gamma_n$.

Za filterski model $\mathcal{M}_\mathcal{F} = (\xi, V_F)$ uzimamo $\xi = \omega^\omega$, a V_F ovakav:

$$\alpha V_F p \iff cvor(\alpha) V_K p.$$

[7] Pritom dopuštamo da nasljednici sadrže i ordinale koje $\mathcal{E}_\alpha$ ne sadrži. Stoga je "nalazi u $\mathcal{E}_\alpha$" zapravo "čini nadskup nekog završetka iz $\mathcal{E}_\alpha$". U tom se smislu skup prirodnih brojeva "nalazi u" familiji $\{\{0.5, \triangle\}, \{19, 3\}\}$, jer čini nadskup drugog skupa.

Te indukcijom po duljini formule pokazujemo da[8]

$$\alpha \vDash F \iff w \vDash F$$

ako je $cvor(\alpha) = w$.

- Ako $F = \bot$, obje strane ne vrijede.
- Ako $F = (G \to H)$, tvrdnja slijedi izravno iz pretpostavke indukcije te činjenice da se definicije za veznik $\to$ poklapaju.
- Ako $F = \Diamond G$.

  1. Pretpostavimo prvo da $w \vDash F$. Tada za neki u za koji wRu vrijedi: $u \vDash G$. Kako je $|G| < |F|$, možemo koristiti pretpostavku indukcije. Tako imamo da za svaki $\beta \in \Gamma(u)$ vrijedi $\beta \vDash G$. (*Sada razlikujemo dva slučaja: kad je u neposredan R-sljedbenik od w, i kad nije. Provedimo prvo dokaz do kraja za prvi slučaj.*)

     Iz (3) slijedi da je $\Gamma(u)$ pozitivan za $\mathcal{E}_\alpha$. Spajajući to dvoje, imamo da u svakom završetku unutar $\mathcal{E}_\alpha$ imamo neki ordinal u kojem vrijedi G. Formalno, $(\forall S \in \mathcal{E}_\alpha)(\exists \beta \in S)(\beta \vDash G)$. No to je upravo definicija za $\alpha \vDash F$.

     Sad promatramo drugi slučaj, pretpostavimo da je u neposredni sljedbenik v-a koji je neposredni sljedbenik od w.

     Tada imamo da $v \vDash F$. Analogno kao za prvi slučaj, ali promatrajući vezu $v \to u$ umjesto $w \to u$, imamo: za svaki ordinal β u $\Gamma(v)$ vrijedi $\beta \vDash \Diamond G$. Pomoću (3) dobivamo da je $\Gamma(v)$ pozitivan za $\mathcal{E}_\alpha$. Iz definicije istine za $\Diamond$ slijedi da $\alpha \vDash \Diamond\Diamond G$. Iz korolara 49 tada konačno slijedi $\alpha \vDash F$.

     U općenitom slučaju u kojem je u n-ta generacija nasljednika w, dobili bismo $\alpha \vDash \Diamond^n G$, te bismo s višekratnom primjenom korolara 49 došli do $\alpha \vDash F$.
  2. Pretpostavimo potom da $w \nvDash F$, pa u svim R-sljedbenicima u od w vrijedi $u \nvDash G$. Po pretpostavci indukcije imamo da za sve ordinale β u $\Gamma(u)$ vrijedi $\beta \nvDash G$. Prema (4) unija svih tih nasljednika je element od $\mathcal{E}_\alpha$. Dakle, u $\mathcal{E}_\alpha$ postoji završetak čiji su svi elementi β takvi da $\beta \nvDash G$. To je upravo definicija $\alpha \nvDash F$.

□

Teorem 51. *Postoji niz funkcija $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sa svojstvima (1)-(4) iz teorema 50.*

Dokaz. Fiksirajmo n i konstruiramo $\Gamma_n =: \Gamma$.

Neka je $p : \omega \setminus \{0\} \to \omega$ "niz" oblika $(0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, \dots)$.

Svakom ordinalu iz $\langle \omega^{n-1}, \omega^n]$ pridružit ćemo neki čvor u K_n. Za korijen stavljamo $\Gamma(\langle\rangle) = \omega^n$.

Sad su preostali ordinali α strogo između ω^{n-1} i ω^n koji su oblika:

$$\alpha = \omega^{n-1} \cdot c_0 + \omega^{e_1} \cdot c_1 + \cdots + \omega^{e_r} \cdot c_r + \omega^h$$

gdje su koeficijenti c_i pozitivni prirodni brojevi, a eksponenti prirodni brojevi uz uvjet $n - 1 > e_1 > \cdots > e_r \geq h$.

α je stoga u Cantorovoj normalnoj formi, osim što je iz posljednjeg člana izoliran jedan faktor. (Ako krećemo od CNF i posljednji je član u toj formi oblika $\beta = \omega^m \cdot 1$, onda bismo taj član obrisali i uzeli da $h = m$.)

[8] Zapravo pokazujemo $\mathcal{M}_\mathcal{F}, \alpha \vDash F \iff \mathcal{M}_\mathcal{K}, w \vDash F$, no sve je jednoznačno jer za "svjetove" $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ koristimo grčka slova (po konvenciji da njima bilježimo ordinale, koji su "točke" filterskog modela).

Jedini članovi koji će sigurno biti prisutni su $\omega^{n-1} \cdot c_0$ i ω^h. To odgovara otvorenom intervalu iz kojeg smo uzeli α.

Uvjet (1) je ispunjen, uvjet (2) o disjunktnosti skupova u slici Γ biva zbog jedinstvenosti normalne forme očuvan sa sljedećom definicijom:

$$\begin{aligned}\Gamma(\langle(i_0, j_0), \ldots, (i_r, j_r)\rangle) = \{&\omega^{n-1} \cdot \mathcal{J}_0 + \\ &\omega^{i_0-1} \cdot \mathcal{J}_1 + \\ &\cdots + \\ &\omega^{i_{r-1}-1} \cdot \mathcal{J}_r + \\ &\omega^{i_r} \mid \mathcal{J}_0 \in p^{-1}(j_0), \ldots, \mathcal{J}_r \in p^{-1}(j_r)\}.\end{aligned}$$

Sjetimo se da za $K_1 = (W, R)$, W sadrži elemente oblika $\langle\rangle$ te $\langle 0, n\rangle$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, konačni nizovi koji čine W imaju (osim praznog niza) po jedan element. No ranije smo rekli da suma na desnoj strani sadrži barem prvi i posljednji izraz, dakle barem dva sumanda. Razlog je u tome što prvi i posljednji sumand određuju samo jedan element konačnog niza (konkretno $\langle(i_0, j_0)\rangle$), dok (za $n > 0$) svi ostali sumandi kodiraju svaki po dvije polovice dva uzastopna para konačnog niza.

S obzirom na to da je skup originala $p^{-1}(y)$ beskonačan za svaki $y \in \mathbb{N}\ \{0\}$, imamo da je $\Gamma(x)$ beskonačan za svaki čvor x.

Sad treba provjeriti uvjete (3) i (4) za ovakvu definiciju. Γ.

Pretpostavimo yRx te nema drugih čvorova između y i x, te $\alpha \in \Gamma(y)$. Prema definiciji čvorova u K_n, to znači da je $x = y * \langle(i, j)\rangle$, za neke $i, j \in \mathbb{N}$. Raspišimo kako izgledaju opći članovi $\Gamma(y)$ i $\Gamma(x)$.

$$\begin{aligned}\alpha_y &= \omega^{n-1} \cdot \mathcal{J}_0 + \omega^{i_0-1} \cdot \mathcal{J}_1 + \cdots + \omega^{i_{r-1}-1} \cdot \mathcal{J}_r + \omega^{i_r} \\ \alpha_x &= \omega^{n-1} \cdot \mathcal{J}_0 + \omega^{i_0-1} \cdot \mathcal{J}_1 + \cdots + \omega^{i_{r-1}-1} \cdot \mathcal{J}_r + \omega^{i_r-1} \cdot \mathcal{J}_{r+1} + \omega^{i_{r+1}}\end{aligned}$$

Oznaku $\mathcal{J}_{r+1}$ uvodimo za proizvoljan element iz $p^{-1}(j_{r+1})$. Skup (prirodnih brojeva) $p^{-1}(j_{r+1})$ je neograničen, pa je jasno da se elementima $\Gamma(x)$ možemo proizvoljno približiti elementu α_y, što taj skup čini pozitivnim za $\mathcal{E}_\alpha$. Time je opravdan uvjet (3). Za uvjet (4), promotrimo gornje izraze za α_y i α_x. α_x ćemo generalizirati na način da je x proizvoljno dijete (ne nužno neposredno) od y. Tj.

$$\alpha_x = \omega^{n-1} \cdot \mathcal{J}_0 + \cdots + \omega^{i_r-1} \cdot \mathcal{J}_{r+1} + \omega^{i_{r+1}-1} \cdot \mathcal{J}_{r+2} + \cdots + \omega^{i_{r+d}-1} \cdot \mathcal{J}_{r+d+1} + \omega^{i_{r+d+1}}.$$

Označimo i:

$$\alpha_0 = \omega^{n-1} \cdot \mathcal{J}_0 + \omega^{i_0-1} \cdot \mathcal{J}_1 + \cdots + \omega^{i_{r-1}-1} \cdot \mathcal{J}_r.$$

Ako fiksiramo koeficijente $\mathcal{J}_0, \ldots, \mathcal{J}_r$ u sva tri izraza α_x, α_y i α_0, vidljivo je da se β koji je strogo između α_0 i α_y može zapisati kao α_x. Otvoreni skup kojeg čine ordinali β u tom intervalu je završetak za α_y, pa je to traženi skup. □

Sljedeći korolar slijedi iz teorema 50 i 51.

Korolar 52. **GL** *je potpun u odnosu na filtersku interpretaciju, tj. ako u svakom filterskom modelu* (ξ, V) *vrijedi* $(\xi, V) \models F$*, tada je* F *teorem sustava* **GL**.

5.4 Prijevod u termine topologije

Sad iskazujemo i dokazujemo centralni dio rada, koji se oslanja na Blassov dokaz potpunosti u odnosu na filtersku interpretaciju.

Teorem 53 (Potpunost)**.** **GL** *je potpun u odnosu na topološki prostor* $(\omega^\omega, \mathcal{T})$*, tj. ako za svaki model oblika* $((\omega^\omega, \mathcal{T}), V)$ *gdje je* $\mathcal{T}$ *uređajna topologija na* ω^ω *vrijedi* $((\omega^\omega, \mathcal{T}), V) \vDash F$*, tada je* F *teorem sustava* **GL**.

Dokaz. Pretpostavimo da F nije teorem **GL**. Tada:

- F nije valjana na klasi konačnih stabala (teorem 24),
- F nije valjana na klasi Blassovih K_n stabala (teorem 27) te
- F nije valjana u filterskoj interpretaciji (korolar 52).

Neka je $\mathcal{M} = (\omega^\omega, V)$ filterski model u kojem F nije ispunjena.
Konstruirat ćemo topološki model $\mathcal{M}' = ((\omega^\omega, \mathcal{T}), V')$ u kojem ne vrijedi F.
Stavimo $V' := V$ i indukcijom pokažimo da

$$\mathcal{M}, \alpha \vDash F \iff \mathcal{M}', \alpha \vDash F.$$

- Ako $F = \bot$, isprazno jer $\bot$ nije ispunjiva.
- Ako $F = p$, tvrdnja je ekvivalentna načinu odabira V'.
- Ako $F = (G \to H)$. Za dokaz kontrapozicijom pretpostavimo da $\mathcal{M}', \alpha \nvDash F$, pa imamo $\mathcal{M}', \alpha \nvDash H$ i $\mathcal{M}', \alpha \vDash G$, Zbog pretpostavke indukcije (koju smijemo koristiti jer $|G|, |H| < |F|$) imamo $\mathcal{M}, \alpha \nvDash H$ i $\mathcal{M}, \alpha \vDash G$, pa konačno $\mathcal{M}, \alpha \nvDash F$. Druga strana dokaza je simetrična.
- Ako $F = \Diamond G$. Pretpostavimo prvo $\mathcal{M}, \alpha \vDash F$. Sjetimo se da to povlači da je α graničan ordinal. Prema definiciji istine u filterskom modelu, u svakom završetku iz $\mathcal{E}_\alpha$ postoji neki β takav da $\mathcal{M}, \beta \vDash G$. Otvoreni skupovi koji su okolina graničnog ordinala sadrže (nadskup su) neki završetak iz $\mathcal{E}_\alpha$. Konkretno, radi se o onim završecima koji su činili "podbazu" u našoj definiciji filtera završetaka (v. definiciju 39). Stoga svi otvoreni skupovi (jer su nadskup nekog završetka) sadrže i neku točku β za koju $\mathcal{M}', \beta \vDash G$. Da bismo mogli zaključiti $\mathcal{M}', \alpha \vDash F$ treba još provjeriti da su tako odabrane β različite od α. S obzirom da je β u završetku α, imamo $\beta < \alpha$, tj. $\beta \neq \alpha$.

  Sad pretpostavimo $\mathcal{M}', \alpha \vDash F$. I kod topoloških modela imamo da to povlači da je α graničan ordinal. Imamo da u svakom otvorenom skupu koji sadrži α postoji β za koju $\mathcal{M}, \beta \vDash G$. Završetak nije poseban tip otvorenog skupa, ali slično kao malo prije svaki završetak sadrži neki otvoreni skup. U tom skupu postoji tražena β, pa generalizacijom po svim završecima imamo $\mathcal{M}, \alpha \vDash F$.

□

Korolar 54. **GL** $\vdash F$ *ako i samo je* F *valjana u* $(\omega^\omega, \mathcal{T})$.

Dokaz. Jedan smjer je potpunost u odnosu na $(\omega^\omega, \mathcal{T})$, drugi smjer je adekvatnost semantike raspršenih topoloških prostora, među koje pripada i ω^ω prostor (teorem 22). □

Korolar 55 (Esakijin izvorni rezultat)**.**

$$\mathbf{GL} \vdash F \iff \{(X, \mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \textit{ je raspršena}\} \models F$$

5.5 Nekompaktnost za ω^ω interpretaciju

Kao što je rečeno u uvodu, jedna od motivacija za traženjem novih semantika za **GL** bi mogla biti nedostatak jake potpunosti u odnosu na klasu inverzno dobro fundiranih tranzitivnih relacijskih okvira. Mijenja li se situacija prelaskom s relacijske na topološku ω^ω interpretaciju?

Definicija 56. *Formula F je lokalno relacijski ispunjiva ako postoji točka $w \in W$ nekog nekog relacijskog modela (W, R) za koju vrijedi $w \vDash F$.*

Formula F je globalno relacijski ispunjiva ako postoji relacijski model $\mathcal{M}$ za koji $\mathcal{M} \vDash F$.

Ako je formula globalno ispunjiva, ujedno je i lokalno ispunjiva. Obrat ne vrijedi.

Kod modalnih logike se obično govori o lokalnoj ispunjivosti. To donekle odudara od logike prvog reda gdje se govori o nečemu što je možda više u duhu globalne ispunjivosti. Tj. u slučaju LPR se govori o postojanju modela, ne o postojanju intepretacije (model s valuacijom) za koju je formula ispunjiva.

Poznato je da je **GL** relacijski (lokalno) nekompaktan (v. [1], str. 102-103). Sljedeća propozicija karakterizira svjetove u kojima može vrijediti $\Diamond F$.

Propozicija 57. *Neka je α ordinal u topološkom modelu $(\omega^\omega, \mathcal{T})$, te neka $\alpha \vDash \Diamond^n F$ za neki $n > 0$. Tada:*

1. *$\alpha \geq \omega^n$ i*
2. *ako pritom i $\alpha < \omega^{n+1}$, onda $\alpha = \omega^n \cdot c$ za neki $c \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Koristimo indukciju po n, simultano za obje tvrdnje.

Za prvu tvrdnju, za bazu ($n = 1$), pretpostavimo suprotno i tada imamo da u nekoj točki nekog modela za $0 < m < \omega$ vrijedi $m \vDash \Diamond F$. No to je nemoguće jer otvoren skup $\{m\}$ sadrži m i samo m, tj. nema druge točke koja bi morala postojati (i u kojoj bi morao vrijediti F). Za drugu tvrdnju, za bazu ($n = 1$) pretpostavimo da $\omega \cdot p + q \vDash \Diamond F$ za neke $p, q \in \mathbb{N}$ i $q > 0$. Kao i za bazu glavne indukcije, postoji jednočlana okolina tog ordinala, kontradikcija.

Pretpostavimo da tvrdnje vrijede za sve brojeve manje od n, te pokažimo da vrijede i za n. Za prvu tvrdnju: neka $\alpha \vDash \Diamond^{n-1}\Diamond F$. Iz pretpostavke indukcije imamo da je stoga $\alpha \geq \omega^{n-1}$. Dovoljno je pokazati da imamo kontradikciju za slučaj $\omega^{n-1} \leq \alpha < \omega^n$.

Pretpostavimo dakle taj slučaj, α ima CNF:

$$\alpha = \omega^{n-1} \cdot c_{n-1} + \omega^{n-2} \cdot c_{n-2} + \cdots + \omega \cdot c_1 + c_0,$$

gdje su $c_i \in \mathbb{N}$.

No iz pretpostavke indukcije druge tvrdnje slijedi da $c_k = 0$ za sve $0 \leq k \leq n-1$. Dakle, α mora ovako izgledati:

$$\alpha = \omega^{n-1} \cdot c_{n-1}.$$

Iz $\alpha \vDash \Diamond^n F$ slijedi da u svakoj okolini α možemo pronaći točku β različitu od α u kojoj vrijedi $\Diamond^{n-1} F$. No u skupu $\langle \omega^{n-1} \cdot (c_{n-1} - 1), \underbrace{\omega^{n-1} \cdot c_{n-1}}_{\alpha} \rangle$ nema točaka oblika $\omega^{n-1} \cdot c$, a pretpostavka indukcije druge tvrdnje pokazuje da samo u takvim točkama može vrijediti $\Diamond^{n-1} F$. Dakle, ne može vrijediti $\omega^{n-1} \leq \alpha < \omega^n$, te iz pretpostavke indukcije imamo $\alpha \geq \omega^{n-1}$, stoga $\alpha \geq \omega^n$.

Sad preostaje pokazati korak indukcije druge tvrdnje. Neka $\alpha \vDash \Diamond^n F$ i $\alpha < \omega^{n+1}$. Tada α ima oblik:

$$\alpha = \omega^n \cdot c_n + \omega^{n-1} \cdot c_{n-1} + \cdots + \omega \cdot c_1 + c_0,$$

Pokažimo još jednom indukcijom da vrijedi sljedeće za $0 \leq k \leq n$: ako $c_k \neq 0$, onda $\alpha \nvDash \Diamond^{k+1} G$.

Ako $c_0 \neq 0$ (baza, tj. $k = 0$), postoji jednočlana okolina α, pa nikakav izraz oblika $\Diamond G$ ne vrijedi. Uzmimo da tvrdnja vrijedi za $0 \leq k < n$. Dakle α ima oblik:

$$\alpha = \omega^n \cdot c_n + \omega^{n-1} \cdot c_{n-1} + \cdots + \omega^k \cdot c_k.$$

U dovoljnoj maloj okolini α stoga svaki ordinal β ima oblik:

$$\beta = \omega^n \cdot c_n + \omega^{n-1} \cdot c_{n-1} + \cdots + \omega^k \cdot (c_k - 1) + \cdots + \omega^{k-l} \cdot (c_{k-l}),$$

gdje je l neki pozitivan prirodni broj. No kako iz pretpostavke indukcije za takav broj β slijedi $\beta \not\models \Diamond^{k-l+1} G'$ ni za koji G', onda specijalno $\beta \not\models \Diamond^k G$. No onda $\alpha \not\models \Diamond^{k+1} G$.

U izvornoj indukciji, pretpostavimo da je neki $0 \leq k \leq n-1$ različit od nule. Fiksirajmo najveći takav k. Tada iz dokazane pomoćne tvrdnje slijedi da nijedan izraz oblika $\Diamond^{k+1}\Diamond^{n-1-k} G$ ne vrijedi u α. Formula F je takvog oblika, pa $\alpha \not\models F$. Stoga pretpostavka da je neki $0 \leq k \leq n-1$ različit od nule nije održiva, odnosno α mora imati traženi oblik $\omega^n \cdot c$.

□

Definicija 58. *Formula F je ω^ω lokalno topološki ispunjiva ako postoji točka $\alpha \in \omega^\omega$ nekog topološkog modela (ω^ω, R) za koju vrijedi $\alpha \models F$.*

Teorem 59 (ω^ω lokalna topološka nekompaktnost)**.** *Postoji skup formula Γ čiji je svaki konačni podskup ispunjiv u ordinalu nekog topološkog modela, ali cijeli skup Γ nije ispunjiv niti u jednom ordinalu nijednog ω^ω topološkog modela.*

Dokaz. Kao u klasičnom dokazu nekompaktnosti za relacijsku semantiku (tranzitivni inverzno dobro fundirani okviri), uzmimo skup formula

$$\Gamma = \{\Diamond p_1\} \cup \{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Konjunkcija K svakog n-članog konačnog podskupa od Γ je istinita u korijenu modela relacijske semantike gdje W ima n elemenata, a R je tranzitivno zatvoren lanac (strogi linearan uređaj) nad W, te je relacija V maksimalna. Zbog toga i teorema 23 imamo da $\neg K$ nije teorem **GL**. Zbog toga i korolara 54 postoji model $\mathcal{M} = ((\omega^\omega, \mathcal{T}), V)$ za koji $\mathcal{M} \not\models \neg K$. To dalje znači da za neki ordinal $\alpha \in \omega^\omega$, vrijedi $\mathcal{M}, \alpha \models K$. Kako je K konjunkcija proizvoljnog konačnog podskupa, imamo da je svaki konačan podskup Γ ispunjiv.

Sad pretpostavimo da je u nekom ordinalu α nekog topološkog modela $\mathcal{M}$ istinita svaka formula iz Γ.

Fiksirajmo najmanji takav α (to smijemo zbog dobre uređenosti ordinala). Lako je (npr. zaključivanjem u relacijskoj semantici te pozivanjem na teorem 23 i korolar 54) vidjeti da tada mora vrijediti

$$\alpha \models \Diamond^n p_n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovako α izgleda u CNF:

$$\alpha = \omega^n \cdot c_n + \omega^{n-1} \cdot c_{n-1} + \cdots + \omega \cdot c_1 + c_0.$$

Po prethodnoj propoziciji imamo da $\alpha \not\models \Diamond^{n+1} p_{n+1}$, što je kontradikcija s tvrdnjom da $\alpha \models \Diamond^n p_n$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. No, onda nije mogao postojati α u kojem su istinite sve formule iz Γ.

□

Definicija 60. *Ako u svakoj točki $x \in X$ svakog topološkog modela iz neke klase modela (ovisno o kontekstu, svih modela, raspršenih modela ili samo ω^ω) u kojoj je istinita svaka formula iz Γ vrijedi i F, pišemo $\Gamma \models F$.*

Definicija 61 (Jaka potpunost)**.** *Sustav modalne logike L je jako potpun u odnosu na određenu semantiku S ako za svaki skup (modalnih) formula Γ vrijedi da $\Gamma \vDash_S F$ povlači $\Gamma \vdash_L F$.*

Korolar 62 (Nedostatak jake potpunosti)**. GL** *nije jako potpun u odnosu na ω^ω topološku interpretaciju.*

Dokaz. Neka je Γ kao u dokazu nekompaktnosti.

Tada imamo $\Gamma \vDash \bot$, no kako se u hilbertovskom dokazu može javiti samo konačan podskup Γ za čiju smo konjunkciju pokazali da je lokalno topološki zadoljiva, vrijedi $\Gamma \nvdash \bot$. $\square$

Napomena 63. *Gornje se tvrdnje odnose na semantiku koju čini prostor $(\omega^\omega, \mathcal{T})$ (Blass/Abashidze interpretacija), ne i na semantiku koju čini klasa svih raspršenih prostora (Esakijina interpretacija).*

Literatura

[1] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, 2003., Cambridge.

[2] L. Esakia, *Diagonal constructions, Löb's formula and Cantor's scattered space*, Academic Press, 1981., Tbilisi (na ruskom).

[3] A. Blass, "Infinitary combinatorics and modal logic", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 55, no. 2, pp. 761–778, 1990.

[4] D. Piponi, "Why is a topology made up of open sets?", MathOverflow, 2010.

[5] M. Vuković, *Teorija Skupova (materijal za predavanja)*, Sveučilište u Zagrebu, 2015., Zagreb.

[6] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2002., Cambridge.

[7] G. Bezhanishvili and J. van Benthem, *Modal Logics of Space*, Springer, 2007., Dordrecht.

[8] L. Beklemishev and D. Gabelaia, "Topological interpretations of provability logic", *ArXiv e-prints*, 2012.

[9] L. Esakia, "Intuitionistic logic and modality via topology", *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 127, no. 1–3, pp. 155 – 170, 2004.

verzija: 15:08:59, 3. studenoga 2015.