Potpunost logike **IL**W u odnosu na generaliziranu semantiku

Luka Mikec Mladen Vuković

20. 5. 2019.

Definicije

$(W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ je generalizirani Veltmanov model ako:

- $W \neq \emptyset$, $R \subseteq W^2$ je tranzitivna i inverzno dobro fundirana;
- $S_w \subseteq R[w] \times \left(2^{R[w]} \setminus \{\emptyset\}\right)$;
- kvazi-refleksivnost: wRu povlači $uS_w\{u\}$;
- kvazi-tranzitivnost: uS_wV i $V \ni vS_wZ_v$ povlači $uS_w(\cup_{v \in V} Z_v)$;
- S_w "proširuje" R: $wRuRv$ povlači $uS_w\{v\}$;
- monotonost: uS_wV' i $V' \subseteq V \subseteq R[w]$ povlači uS_wV;
- $\Vdash$ je relacija forsiranja

Označimo $[A]_w = \{u \in R[w] : u \Vdash A\}$.
Istinitost $A \rhd B$ u w:

$$w \Vdash A \rhd B \text{ ako i samo ako } (\forall u \in [A]_w)\ uS_w[B]_w$$

Potpune/pametne oznake

$w \prec_S u$ ako i samo ako za sve A i konačne $S' \subseteq S$:

$$A \rhd \bigvee_{G \in S'} \neg G \in w \;\Rightarrow\; \neg A, \Box\neg A \in u.$$

Skup formula koje moraju biti u svijetu (skupu) u ako $w \prec_S u$: $w_S^{\boxdot}$.
Korisna i sljedeća oznaka ($\Box$ umjesto $\boxdot$):

$$w_S^{\Box} = \{\Box\neg A : S' \subseteq S,\ S' \text{ konačan},\ A \rhd \bigvee_{G \in S'} \neg G \in w\}.$$

Neka svojstva:

- $w \prec_S u$ povlači $S \subseteq u$
- $w \prec_\emptyset u$ ako i samo ako $w \prec v$
- $S \subseteq T$ i $w \prec_T u$ povlači $w \prec_S u$
- $w \prec_S u \prec v$ povlači $w \prec v$

$(\mathrm{W})_{\mathrm{gen}}$

Karakteristična klasa za **IL**W dana je svojstvom $(\mathrm{W})_{\mathrm{gen}}$:

$$uS_wV \Rightarrow (\exists V' \subseteq V)(uS_wV' \ \& \ R[V'] \cap S_w^{-1}[V] = \emptyset).$$

Malo informativnije, za svaki protuprimjer (w, u i V) postoji $U \subseteq V$:

(i) $uS_wU \ \& \ (\forall U' \subseteq U)(uS_wU' \Rightarrow R[U'] \cap S_w^{-1}[U] \neq \emptyset)$;

(ii) $R[U] \cap U = \emptyset$;

(iii) Postoje skupovi U_0 i $\overline{U}$ sa sljedećim svojstvima:
- $U_0 = \{v \in U : R[v] \cap S_w^{-1}[U] = \emptyset\}$;
- $\overline{U} = \{v \in U \setminus U_0 : \forall V'(\exists z\ vRzS_wV' \subseteq U \ \Rightarrow \ V' \cap \overline{U} \neq \emptyset)\}$.

Vrijedi $U = U_0 \cup \overline{U}$ i $\overline{U} \neq \emptyset$.

ILW-struktura

Lema (Smart labels 3.12)

*Ako w **IL**W-mcs i $\neg(B \rhd C) \in w$, postoji **IL**W-mcs u takav da $w \prec_{\{\Box\neg B, \neg C\}} u \ni B$.*

Lema (Smart labels 3.13)

*Ako w i u **IL**W-mcs, $B \rhd C \in w \prec_S u \ni B$, postoji **IL**W-mcs v takav da $w \prec_{S \cup \{\Box\neg B\}} v \ni C, \Box\neg C$.*

ILW-struktura

Definicija

Neka je $\mathcal{D}$ konačan, zatvoren na potformule, jednostruke negacije i sadrži $\top$. **IL**W-struktura za $\mathcal{D}$ je struktura $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$:

$$W = \{w : w \text{ je } \mathbf{IL}\text{W-mcs i postoji } G \in \mathcal{D},\ G \wedge \Box\neg G \in w\};$$

$$wRu \Leftrightarrow w \prec u;$$

$$uS_wV \Leftrightarrow wRu, V \subseteq R[w] \text{ i vrijedi (a) ili (b):}$$

$$(a) \quad V \cap \dot{R}[u] \neq \emptyset;$$

$$(b) \quad (\forall S)(w \prec_S u \Rightarrow (\exists v \in V)(\exists G \in \mathcal{D} \cap \bigcup \dot{R}[u])\ w \prec_{S \cup \{\Box\neg G\}} v);$$

$$w \Vdash p \Leftrightarrow p \in w.$$

ILW-struktura

Lema

***IL**W-struktura je generalizirani Veltmanov model, i model za svaku ispunjivu $G \in \mathcal{D}$.*

Dokaz.

Sva se strukturna svojstva dokazuju kao za **IL**X-strukturu (prethodni seminar), osim kvazi-tranzitivnosti (4 slučaja).
Lema o istinitosti za formule iz $\mathcal{D}$: opet slično, a za formule $\Box\neg G$ iz definicije biramo $\Box\neg B$ iz lema. $\Box$

Karakteristično svojstvo: uvod

$$n = 2^{|\mathcal{D}|}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \{\emptyset = \mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}\}$$

Označimo za $0 \leq i < n$, $y \in W$ te $U \subseteq W$:

$$yS_w^i U \iff yS_w U,\ \mathcal{D}_i \subseteq \bigcup \dot{R}[y],\ U \subseteq \left[\bigvee_{G \in \mathcal{D}_i} \Box \neg G \right]_w .$$

Lako se vidi:

$$yS_w U \quad \Rightarrow \quad (\exists i < n, U' \subseteq U) yS_w^i U'$$

Formule G su formule G iz definicije relacije S_w.
Skup U' je skup S-svjedoka iz definicije relacije S_w.

Karakteristično svojstvo: primjer

Je li **IL**W-struktura dovoljno ograničena da se osigura $(W)_{gen}$? Pretpostavimo da se dogodilo (samo) sljedeće:

$$
\begin{aligned}
c_0 S_w^{i_0} A_1 &\cup \{b_1\} \\
b_1 R c_1 S_w^{i_1} A_2 &\cup \{b_2\} \\
b_2 R c_2 S_w^{i_2} A_3 &\cup \{b_3\} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Kvazitranzitivnost povlači:

$$
\begin{aligned}
c_0 S_w^{j_0} A_1 &\cup \{b_1\} \\
c_0 S_w^{j_1} A_1 \cup A_2 &\cup \{b_2\} \\
c_0 S_w^{j_2} A_1 \cup \ldots \cup A_k &\cup \{b_k\} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Karakteristično svojstvo: primjer

$$
\begin{array}{rcr}
c_0 S_w^{i_0} A_1 \cup \{b_1\} & \qquad & c_0 S_w^{j_0} A_1 \cup \{b_1\} \\
b_1 R c_1 S_w^{i_1} A_2 \cup \{b_2\} & & c_0 S_w^{j_1} A_1 \cup A_2 \cup \{b_2\} \\
b_2 R c_2 S_w^{i_2} A_3 \cup \{b_3\} & & c_0 S_w^{j_2} A_1 \cup ... \cup A_k \cup \{b_k\} \\
\dots & & \dots \\
\hline
\end{array}
$$

$$V := \bigcup_{j \in \omega} A_j \cup \{b_j : j \in \omega\}$$

Ako $c_0 S_w V' \subseteq V$, onda V' sadrži neki b_j.
Monotonost: $V' \ni b_j R c_j S_w V$.
Dakle, w, c_0 i V su protuprimjer za $(\mathrm{W})_{\mathrm{gen}}$.

Karakteristično svojstvo: primjer

Općenito, za $j < k$:

$$c_j S_w^{C(j,k)} A \cup \{b_k\},$$

gdje je $C(i,j) \in \{0, \dots, n-1\}$, i $A \subseteq A_{j+1} \cup \cdots \cup A_k$.
Očito $C(j,k) \neq C(k,\ell)$, inače za neki $F \in \mathcal{D}_{C(j,k)} = \mathcal{D}_{C(k,\ell)}$:

- $\Box\neg F \in b_k$;
- $F \in \bigcup \dot{R}[c_k]$, pa $\Diamond F \in b_k$.

Definirajmo graf G:

- $V = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : a < b\}$;
- $(a,b)E(c,d)$ ako $a = d$ ili $b = c$.

Cijela opisana situacija nije moguća ako taj graf nije obojiv.

Karakteristično svojstvo: primjer

Dokaz 1
Neka je n-obojiv bojama $0 \leq C(i,j) < n$. Neka je $m \leq n$ maksimalan za kojeg postoje U i V:

(i) $(\forall x \in U)(\forall y \in V)(x < y \implies C(x,y) \geq m)$;

(ii) $U \subseteq V \subseteq \mathbb{N}$, te su U i (posljedično) V beskonačni.

Skup kandidata omeđen odozgo ($m \leq n$) i neprazan (npr. $m = 0$, $U = V = \mathbb{N}$).
Vrijedi $m < n$; inače neki par (a,b) obojan s $m = n$ (n nije boja).

$$T = \{x \in U : (\exists y \in U)(x < y \,\&\, C(x,y) = m)\}.$$

Tvrdimo: $m + 1$ ispunjava (i) te (ii) uz U (umjesto V) i $U \setminus T$ (umjesto U).

Karakteristično svojstvo: primjer

(i)' $(\forall x \in U \setminus T)(\forall y \in U)(x < y \;\Rightarrow\; C(x,y) \geq m)$;

(ii)' $U \setminus T \subseteq U \subseteq \mathbb{N}$, te su $U \setminus T$ i U beskonačni.

(i) Neka $x \in U \setminus T$, $y \in U$ te $x < y$. Iz (i) za m: $C(x,y) \geq m$. Kako imamo $x \notin T$, onda $C(x,y) \neq m$. Dakle, $C(x,y) \geq m+1$.
(ii) U beskonačan (od ranije). Za $U \setminus T$: neka je $k \in \mathbb{N}$, te $x \in U$ proizvoljan takav da $x > k$ (x postoji jer je U beskonačan).
Ako $x \in U \setminus T$, gotovi smo. Inače, $x \in T$.
Dakle, postoji $y \in U$, $x < y$, takav da $C(x,y) = m$.
Ako $y \in T$, postoji $z \in U$ takav da $C(y,z) = m$. Tada imamo $C(x,y) = m = C(y,z)$, što je nemoguće, jer $(x,y)E(y,z)$.
Dakle, $y \in U \setminus T$. Uz to k $(< x) < y$.

Karakteristično svojstvo: primjer

Dokaz 2 (Vjekoslav Kovač)
Neka je G_n konačni podgraf sastavljen od parova (i, j) za $1 \le i < j \le n$ i neka je $\chi(G_n)$ njegov kromatski broj.

Brojevi $\chi(G_n)$ rastu i zapravo želimo pokazati da su neograničeni. Pretpostavimo suprotno.

Tada bi niz $\chi(G_n)$ bio ograničen i maksimum bi postizao za neki dovoljno veliki indeks n. Definirajmo

$$m = 2n\chi(G_n).$$

Iz prethodnog slijedi $\chi(G_m) = \chi(G_n)$, tj. graf G_m se može obojiti u $\chi(G_n)$ boja.

Posebno pogledajmo vrhove (i, j) za $i \le m/2, j > m/2$, vizualno je to “kvadrat”. Neka boja, recimo plava, pojavljuje se barem u nekih $m/(2\chi(G_n)) = n$ redaka tog kvadrata.

Karakteristično svojstvo: primjer

Neka su reci u kojima se javlja plava: $i_1, i_2, ..., i_n$.
Sada pogledajmo podgraf P od G_m induciran recima i stupcima s indeksima $i_1, i_2, ..., i_n$.
Podgraf P je izomorfan s G_n i upravo smo ga obojili svim bojama osim plave.
[Izomorfizam $G_n \to P$: $(a, b) \mapsto (i_a, i_b)$.
Pretpostavimo da je $C(i_a, i_b)$ plava boja. Znamo da se u retku i_b javlja plava, pa imamo da je $C(i_b, x)$ plava boja. Kontradikcija.]

Može li se $(\mathrm{W})_{\mathrm{gen}}$ općenito svesti na neobojivost grafa?
Ako da, to bi možda skratilo sljedeći dokaz.

ILW struktura ima $(\mathrm{W})_{\mathrm{gen}}$

Teorem

*Svaka **IL**W struktura ima svojstvo $(\mathrm{W})_{gen}$.*

Pretpostavimo suprotno; označimo s $\mathcal{V}$ skup svih V takvih da:

$$uS_wV \ \& \ (\forall V' \subseteq V)(uS_wV' \Rightarrow R[V'] \cap S_w^{-1}[V] \neq \emptyset)$$

Neka je $m < n$ maksimalan takav da postoje $U \in \mathcal{V}$ i $U' \subseteq U$:

(i) $(\forall x \in U)[(\exists y \in R[x])(\exists Z \subseteq U)(\exists i \leq m)\ yS_w^iZ \Rightarrow x \notin U']$;

(ii) $(\forall x \in W)(xS_wU \Rightarrow xS_wU')$.

Za $m = 0$, $\mathcal{D}_0 = \emptyset$, pa $[\bigvee_{G\in\mathcal{D}_0} \Box\neg G]_w = [\bot]_w = \emptyset$. Stoga ne postoji $Z \subseteq [\bigvee_{G\in\mathcal{D}_0} \Box\neg G]_w$ t.d. yS_wZ za neki $y \in W$; pa je (i) ispunjeno. Ako stavimo $U' = U$ za bilo koji $U \in \mathcal{V}$, (ii) također.

Kako je konačno mnogo kandidata, mora postojati maksimalan takav m.
Prvo ćemo dokazati da $m < n - 1$, a zatim da i $m + 1$ mora ispunjavati (i) te (ii).

ILW struktura ima $(\mathsf{W})_{\mathsf{gen}}$: korak 1./3

Pretpostavimo suprotno, tj. $m = n - 1$.
Kako $U \in \mathcal{V}$, imamo uS_wU. Svojstvo (ii) povlači uS_wU'. Dakle, $R[U'] \cap S_w^{-1}[U] \neq \emptyset$, tj. postoje $x \in U'$ i $y \in R[x]$ takvi da yS_wU.

Sada (ii) povlači yS_wU'. Dakle, postoji $i < n$ te $Z \subseteq U'$ takvi da yS_w^iZ.

Kako $m = n - 1$, mora vrijediti $i \leq m$. Ali tada svojstvo (i) povlači $x \notin U'$, kontradikcija.

$\mathbf{IL}$W struktura ima $(\mathrm{W})_{\mathrm{gen}}$: korak 2./3

Označimo

$$Y = \{x \in U' : (\exists y \in R[x])(\exists Z \subseteq U')\ yS_w^{m+1}Z\}.$$

Za $m+1$ uzimamo skupove U' umjesto U, i $U' \setminus Y$ umjesto U'.

Dokažimo da je (i) ispunjeno za $m+1$:

$$(\forall x \in U')[(\exists y \in R[x])(\exists Z \subseteq U')(\exists i \leq m+1)\ yS_w^iZ \Rightarrow x \notin U' \setminus Y].$$

Neka su $x \in U', y \in R[x], Z \subseteq U', i \leq m+1$ takvi da yS_w^iZ.

Ako $i \leq m$, (i) za m povlači $x \notin U'$, pa posebno $x \notin U' \setminus Y$.

Ako $i = m+1$, onda $x \in Y$. Dakle, $x \notin U' \setminus Y$.

ILW struktura ima $(\mathrm{W})_{\mathrm{gen}}$: korak 3./3

Preostaje dokazati (ii), tj. da xS_wU' povlači $xS_wU' \setminus Y$.
Za svaki $y \in Y$ fiksirajmo $z_y \in R[y]$ i $U_y \subseteq U'$ takve da $z_yS_w^{m+1}U_y$.

$\mathcal{D}_{m+1} \subseteq \bigcup \dot{R}[z_y]$, pa (jer yRz_y), $y \Vdash \Diamond G$, za sve $G \in \mathcal{D}_{m+1}$.
$U_y \subseteq [\bigvee_{G \in \mathcal{D}_{m+1}} \Box\neg G]_w$. Stoga:

$$Y \Vdash \bigwedge_{G \in \mathcal{D}_{m+1}} \Diamond G \quad \text{i} \quad U_y \Vdash \bigvee_{G \in \mathcal{D}_{m+1}} \Box\neg G,$$

za sve $y \in Y$.
Dakle, $U_y \cap Y = \emptyset$, za sve $y \in Y$.

Za $y \in U' \setminus Y$, stavimo $U_y = \{y\}$. Očito i za takve y, $U_y \cap Y = \emptyset$.

Stavimo $Z = \bigcup_{y \in U'} U_y$. Očito $Z \subseteq U' \setminus Y$. Sada xS_wU' i kvazi-tranzitivnost impliciraju xS_wZ. Monotonost povlači $xS_wU' \setminus Y$.

Zaključak

- $\mathbf{IL}\mathrm{M_0W}$
- $\mathbf{IL}\mathrm{RW}$
- $\mathbf{IL}\mathrm{P_0W}$
- $\mathbf{IL}\mathrm{X}$ +

$$w \prec_S u \;\Rightarrow\; (\exists F \in \mathcal{D}) w \prec_{S \cup \{\Box\neg F\}} u \ni F,$$