Sveučilište u Rijeci
Filozofski fakultet u Rijeci – Odsjek za filozofiju
Dvopredmetni preddiplomski studij filozofije i informatike

Završni rad

Gödel-Löb sustav i generiranje teorema

Luka Mikec

Mentorica: prof. dr.sc. Majda Trobok
Komentorica: dr.sc. Tajana Ban Kirigin

Rijeka, rujan 2014.

Sadržaj

Sažetak

Gödel-Löb sustav (**GL**) je sustav normalne modalne logike dobiven proširenjem sustava **K** instancama formaliziranog Löbovog teorema $\Box(\Box F \to F) \to \Box F$. **GL** formalizira logiku unutarteorijskog predikata "dokazivo" dovoljno snažnih aritmetika i nekih drugih teorija, između ostalih Peanove aritmetike prvog reda. Time je omogućeno promatranje dokazne snage formalnih aritmetika o vlastitoj dokazivosti u formalno znatno jednostavnijem okruženju od samih formalnih aritmetika, naime u okruženju sustava modalne logike sa svojstvima normalnosti, konzistentnosti, semantičke potpunosti i formalne odlučivosti.

Ovaj rad ima dva cilja. Prvi je predstaviti sustav **GL**: opisati motivacije iz kojih se istraživao te dokazati njegove osnovne metateoreme. U tom se dijelu rad oslanja na klasičnu literaturu o modalnoj logici, metateoriji formalnih aritmetika i prvenstveno samom sustavu **GL**.

Drugi cilj je iskoristiti svojstvo odlučivosti za implementaciju automatiziranog dokazivača teorema za **GL**. S obzirom da je **GL** sustav koji je između ostalog odlučiv preko metode modalnih istinitosnih stabala, implementirano je generiranje ispravno sastavljenih modalnih formula od kraćih ka dužima te lociranje onih među njima koje su **GL** teoremi. Pritom je posvećena pažnja pronalaženju intuitivno zanimljivih teorema. Za ovaj je cilj konzultirana literatura o pojmu zanimljivosti otkrića u formalnim sustavima.

Ključne riječi: *automatizirano dokazivanje teorema, modalna logika, metateorija formalnih aritmetika, Gödel, Löb, Boolos*

1 Uvod i pregled rada

Kurt Gödel[1] 1931. dokazuje: *Peanova aritmetika, i općenito svaka konzistentna, dovoljno snažna i rekurzivno aksiomatizirana teorija aritmetike u logici prvog reda, nije formalno potpuna teorija; za nju postoje nedokazive i neoborive formule.*[2]

Kurt Gödel kasnije predlaže istraživanje modalne logike koja formalizira njegov unutarteorijski predikat dokazivosti *Bew* (prema njem. *beweisbar* = dokazivo) aritmetičke rečenice.

Predikat dokazivosti *Bew* djeluje nad Gödel-kodiranim rečenicama aritmetike i (pokazalo se) zadovoljava uvjete za formalizaciju u obliku sustava modalne logike. Naime, vrijedi modalni modus ponens i pravilo necesitacije. Sustav Gödel-Löb[3] (**GL**) je ta formalizacija.

Sustav **GL**, osim što je normalna modalna logika, ima i neka dodatna lijepa svojstva:

- *Jako korespondira* s jednom klasom Kripkeovih okvira što joj daje prirodnu semantiku. Radi se o klasi tranzitivnih konverzno dobro utemeljenih okvira. (*Pouzdanost*)
- Sve modalne formule valjane na toj klasi su izvodive u **GL**. (*Potpunost*)
- **GL** u potpunosti zahvaća logiku predikata *Bew*. Primjerice, formalizirani Gödelov 2. teorem nepotpunosti je teorem **GL**. (*Aritmetička potpunost*)
- **GL** je odlučiv; postoji efektivan postupak koji prepoznaje teoreme. Svojstvo odlučivosti **GL** je presudno u ovom radu.

No, za razliku od drugih često korištenih sustava modalne logike, klasu okvira kojoj **GL** jako korespondira nije moguće definirati rečenicama prvog reda. Osim toga, sustav nije ni jako potpun s obzirom na semantiku Kripkeovih okvira. Naime, nije zadovoljen uvjet da za svaki skup formula iz kojeg semantički slijedi formula F postoji podskup iz kojeg je F sintaktički izvodiva.

Rad je strukturiran u četiri dijela. Prvi je dio skica Gödelove aritmetizacije aritmetike.[4] Drugi je dio uvod u modalnu logiku.[5] Treći je dio vezan uz **GL**, dani su neki najvažniji rezultati. Do te točke rad više ili manje prati izlaganje u [Boolos 1993] i [Smith 2011].

Prva su tri dijela minimalan uvod u četvrti dio. Četvrti dio koristi svojstvo odlučivosti **GL** za (moj) komentar na **GL** teoremstvo. Implementirao sam metodu stabala i na temelju nje izradio *automatizirani dokazivač teorema*[6] za **GL**. Ključno je bilo (prvo) odrediti što čini teorem zanimljivim te (drugo) odrediti strukturu vizualizacije rezultata, s obzirom na velik broj rezultata. Izvorni programski kôd dokazivača dostupan je na Internetu.[7]

---

[1] Brno, 28. travnja 1906. - Princeton, 14. siječnja 1978. Filozof i matematičar. Najznačajniji upravo po teoremima nepotpunosti.

[2] Gödel je u stvari dokazivao na primjeru Russellovog i Whiteheadovog sustava *Principia Mathematica*, te je dokazao nešto slabiju varijantu teorema: da za odgovarajuće konzistentne teorije postoje nedokazive, a za odgovarajuće ω-konzistentne teorije i nedokazive i neoborive formule. Uvjet ω-konzistentnosti traži da teorija ne može istovremeno dokazati i $\exists x \neg P(x)$ i $P(c)$ za svaki c. U tekstu je dana varijanta poznata pod nazivom Gödel-Rosserov teorem nepotpunosti.

[3] ime prema [Boolos 1993]. Kao kratice za isti ili ekvivalentni sustav drugi autori koriste još i **G**, **L**, **K4L**, **KW**, **K4W**, **PRL**, ...

[4] To je temelj Gödelovih dokaza; neformalan uvod u njih dan je u [Nagel 2001]. Formalniji i precizniji uvod je skripta Petera Smitha "Gödel without tears" (*Gödel bez suza*) [Smith 2011]. [Smith 2013] je proširenje te skripte manje ključnim dokazima. [Hofstadter 1979] između ostalog sadrži i neformalan uvod u Gödelove dokaze, dublji od Nagelovog no i znatno dulji.

[5] Kratak ali sadržajan uvod je skripta [Žarnić 2008]. Sustavan pregled je u [Blackburn et al. 2002].

[6] *Automated theorem prover* (ATP). ATP su aplikacije koje iz raznih motivacija dokazuju teoreme promatranih formalnih sustava, obično dokaze gradeći znatno kompliciranijim metodama od ovdje korištenih.

[7] Na adresi `https://github.com/luka-mikec/godellob-prover` je inačica namijenjena pokretanju na lokalnom računalu, a starija i sporija mrežna varijanta na `http://www.ffri.hr/~lmikec/gl`.

1.1 Napomene

Kroz rad se pretpostavlja poznavanje osnovnih pojmova iz sintakse i semantike propozicijske logike, te osnove naivne teorije skupova.

Terminološke i notacijske napomene:

- *Propozicijska logika* je iskazna logika.
- *Propozicijsko slovo* je propozicijska varijabla, osnovni gradivni blok propozicijskih formula.
- *Propozicijski operator* je logički veznik propozicijske logike.
- *Formula* je modalna propozicijska formula ako nije drugačije napomenuto. Osim modalnih propozicijskih formula u ovom se radu na nekoliko mjesta spominju i formule formalnih aritmetika prvog reda. U govoru je o njima to eksplicirano korištenjem termina poput "aritmetička formula" ili "PA formula". Formule i metavarijable za formule svih vrsta označene su velikim slovima abecede poput F, G, H itd.
- Izrazom $F = G$ tvrdi se da su F i G znak-po-znak jednake formule. Npr. $(p \vee q) = (p \vee q)$ ali $(p \vee q) \neq (\neg p \rightarrow q)$. Izrazom $F \equiv G$ tvrdi se da su F i G semantički ekvivalentne (istovrijedne) u sustavu **ML** o kojem je u danom kontekstu riječ. Dakle, to je pokrata za $\mathbf{ML} \vDash F \leftrightarrow G$. Ako iz konteksta nije očito o kojem je sustavu riječ, koristit će se notacija $F \equiv_S G$. S obzirom da će potreba za simbolom $\equiv$ doći u trenutku u kojem će biti jasno da se semantika promatranih sustava modalne logike poklapa s formalnom izvodivošću, ne koristi se poseban simbol kao pokrata za $S \vdash F \leftrightarrow G$.
- *Sustav* je skup aritmetičkih, propozicijskih ili modalnih formula generiranih zadanim aksiomima i pravilima zaključivanja. Za razliku od termina *propozicijska logika* koji se najčešće odnosi na jedan sustav (u kojem je teorem npr. $p \rightarrow (q \vee p)$), termin *modalna logika* se odnosi na cijelu klasu sustava. U radu će biti precizirani uvjeti za *sustave* modalne logike općenito, te za konkretne sustave modalne logike o kojima će biti riječ. Pritom će se zanemariti postojanje sustava modalne logike koji nemaju tzv. svojstvo normalnosti.
- *Modalni operatori* su simboli $\Box$ i $\Diamond$.
- Kratice sustava modalne logike su podebljane, poput **K**. Kad je potrebno nešto reći o proizvoljnom sustavu modalne logike, koristit će se metavarijabla **ML**.
- Kratice drugih sustava (koji nisu sustavi modalne logike) nisu podebljane, poput PA.
- *Pouzdanost (eng. soundness)* je korektnost ili adekvatnost[8]. **ML** je pouzdan ako vrijedi $\mathbf{ML} \vdash F \Rightarrow \mathbf{ML} \vDash F$.
- *Potpunost* je semantička potpunost.[9] **ML** je potpun ako vrijedi $\mathbf{ML} \vDash F \Rightarrow \mathbf{ML} \vdash F$. Preostale se vrste potpunosti koje se javljaju u tekstu (aritmetička i formalna) uvijek navode punim nazivom, npr. aritmetička potpunost.
- Ako je X skup, $|X|$ je kardinalni broj skupa X. Ako je X formula, $|X|$ je broj znakova (duljina) formule.

[8] Kod nekih autora termini *adekvatnost* i *potpunost* označavaju jače svojstvo da $\mathbf{ML} \vDash F$ ako i samo ako $\mathbf{ML} \vdash F$.

[9] v. prethodnu fusnotu.

2 Metateorija Peanove aritmetike

2.1 Formalne aritmetike

Iako nije striktno vezano uz **GL**[10], proučavanje formalnih aritmetika je vjerojatno inspiriralo sva veća otkrića o **GL**.

Peanova aritmetika (PA) je teorija prvog reda s jednakošću koja opisuje svojstva funkcije sljedbenika s, zbrajanja $+$ i množenja $*$ prirodnih brojeva.[11] Osim leksika logike prvog reda s jednakosti i funkcijskog simbola s, prisutni su još i objektna konstanta 0 te dvomjesni funkcijski simboli $+$ i $*$.

- $\neg\exists n(s(n) = 0)$
- $\forall n\forall m(s(n) = s(m) \to n = m)$
- $\forall n(n + 0 = n)$
- $\forall n\forall m(n + s(m) = s(n + m))$
- $\forall n(n * 0 = 0)$
- $\forall n\forall m(n * s(m) = n * m + n)$
- $P(0) \to (\forall n(P(n) \to P(s(n)))) \to \forall nP(n))$ [12]

Iz navedenih aksioma slijede tvrdnje poput $2 + 2 = 4$ ili "Ne postoji najveći prosti broj." (uz prikladne definicije prostog broja i najvećeg broja koji zadovoljava neko svojstvo) itd.

Formalna nepotpunost PA je iznenađujuća činjenica da za svako konzistentno i aksiomatizabilno[13] proširenje PA postoji aritmetička formula F takva da niti je F teorem, niti je $\neg F$ teorem. Drugim riječima, nije moguće postojanje aksiomatizabilnog maksimalno konzistentnog skupa[14] koji je nadskup PA. To čini problematičnom klasičnu sliku aritmetike u kojoj možemo skup svih aritmetičkih formula podijeliti na istinite i neistinite, jer se očekuje da je skup istinitih aritmetičkih

---

[10] Prije nego li je postao popularan kao dio logike dokazivosti, formalizirani Löbov teorem koji čini razliku između **K** i **GL** je (još 1963.) bio korišten u deontičkoj logici. Jedno moderno korištenje $\Box(\Box p \to p)$ u etici je: Obavezujuće je činiti (učiniti aktualno stanje stvari takvim) ono što je obavezujuće.

[11] Prirodni su brojevi u PA predstavljeni svojim numeralima. Numeral za broj označen s 0 je naprosto 0. Za ostale brojeve ne uvodimo eksplicitne numerale (poput 1 i 2), već na njih možemo referirati korištenjem funkcije sljedbenik. Primjerice, na 1 pomoću $s(0)$, na 2 pomoću $s(s(0))$ itd. Namjeravano tumačenje funkcijskog simbola s je funkcija *sljedbenik*, $f(x) = x + 1$, što naravno ne možemo izravno zapisati među aksiome PA jer upravo njima i definiramo, između ostalog, prirodne brojeve te zbrajanje. Izraze koji predstavljaju brojeve u PA (poput $s(s(0))$ koji predstavlja 2) pravilno zovemo numeralima a ne brojevima, jer oni predstavljaju brojeve (u standardnom tumačenju), no sami po sebi nisu brojevi. Jesu li 1 i 2 iz primjerice osnovnoškolske matematike entiteti sa svojstvima koje Peanovi aksiomi opisuju za $s(0)$ i $s(s(0))$ ostaje otvoreno pitanje.

[12] Ovo je shema matematičke "indukcije"; to da je shema znači da se ne radi o jednoj aritmetičkoj formuli koja je aksiom, već da je aksiom bilo koja aritmetička formula tog oblika. Konkretnije, tog su oblika sve aritmetičke formule koje umjesto $P(n)$ sadrže aritmetičku formulu dobivenu zamjenom svoje jedine slobodne varijable s n, a umjesto $P(s(n))$ aritmetičku formulu dobivenu zamjenom jedine slobodne varijable sa $s(n)$. Intuitivno je dakle $F(x)$ aplikacija ("poziv") istinitosne funkcije F s argumentom x.

[13] Aksiomatizabilnost (u literaturi *rekurzivna aksiomatizabilnost*) je svojstvo koje skup nizova znakova ima ako postoji algoritam koji će u konačno mnogo vremena za svaki konačan niz znakova reći je li taj niz element spomenutog skupa ili nije. Pojačana formulacija Gödelovog teorema u kojoj bismo izbacili uvjet rekurzivne aksiomatizabilnosti ne vrijedi zbog *Lindenbaumove leme* prema kojoj svaki konzistentan skup rečenica prvog reda ima barem jedan formalno potpun, ali ne nužno i aksiomatizabilan, nadskup.

[14] Maksimalno konzistentan skup je konzistentan skup čije je svako proširenje inkonzistentno. Primjerice, ako ima smisla govoriti o sveznajućem biću, tada bi skup istina koje to biće zna bio maksimalno konzistentan skup.

formula aksiomatizabilan maksimalno konzistentan skup.[15] Sve je to pod pretpostavkom da je aritmetika konzistentna; ako nije, onda je zbog *ex falso quodlibet* PA neiskoristiva teorija.

U ovom radu Gödelova otkrića nisu toliko relevantna koliko metoda kojom je do nje došao. Gödel je izgradio metateoriju aritmetike u samoj aritmetici. Kako je formalna aritmetika teorija koja se bavi konačnim nizovima znakova (aritmetičkim formulama) i pravilima transformacija tih konačnih nizova (izvođenjem teorema), njena metateorija je teorija koja zahvaća relacije poput "... je niz duljine 5 znakova" i "... je niz koji se pravilom *modus ponens* izvodi iz ... i ..." itd.

Između ostalog, PA može indirektno dokazivati o svojoj sposobnosti dokazivanja. **GL** teoremi nisu ništa drugo doli teoremi PA, dobiveni zamjenom svakog propozicijskog slova s proizvoljnom zatvorenom aritmetičkom formulom, a modalni operator stoji umjesto PA predikata dokazivosti.[16]

2.2 Kodiranje sintakse

PA je teorija o brojevima. Želimo li da *govori o sebi* - o svojim formulama, teoremima i dokazima - moramo metaentitete (ono što je *o* brojevima) svesti na entitete koje teorija formalizira (brojeve).

Postupak za to je tzv. aritmetizacija aritmetike. Poznatiji je pod nazivom Gödel-kodiranje, no to implicira da je riječ o kodiranju kojeg je koristio sam Gödel i samo je jedno od brojnih mogućih. Ovdje će biti (neformalno) opisana skica jedne moguće metode aritmetizacije aritmetike. Možemo krenuti od leksika PA, tj. skupa znakova koji se mogu javiti u PA formulama. Logičkim operatorima, simbolu jednakosti, simbolu 0 te simbolima s, $+$ i $*$ možemo pridružiti brojeve od 100 do 200, a slobodnim i vezanim varijablama brojeve od 200 do 300.[17]

Kodove PA formula možemo izraditi konkatenacijom kodova simbola (odnosno brojeva u dekadskom sustavu) sadržanih u toj PA formuli te dodavanjem nekog sufiksa, primjerice 888. Uzmimo da je simbol '0' kodiran s 100 a '=' s 105. Tada je niz $0 = 0$ kodiran brojem 100105100. Konačno, dodajemo sufiks te je rezultat 100105100888.

PA dokazi su nizovi PA formula gdje je svaka aksiom ili neposredna posljedica nekog podskupa prethodnog dijela niza. $(0 = 0) \wedge (0 = 0)$ je teorem PA. Pod pretpostavkom da je u odabranom skupu operatora PA i operator $\wedge$, te da je dostupno pravilo introdukcije konjunkcije, tada se $(0 = 0) \wedge (0 = 0)$ dokazuje aksiomom $0 = 0$ i potom pravilom introdukcije konjunkcije. Takve dokaze možemo kodirati konkatenacijom kodova elemenata niza i npr. dodavanjem sufiksa 999. Spomenuti dokaz uz kodiranje $\wedge$ s 103 postaje 100105100888100105100103100105100888999.

Taj broj je vrlo lako dekodirati: 999 na kraju govori da je riječ o dokazu. Kod potom čitamo slijeva i svaki put kad naiđemo na 888 znamo da se radi o kraju trenutno čitanog koda PA formule.

Relativno je lako i postaviti PA predikate koji će "čitati" ispravne kodove.[18] Npr. ovo je predikat $Formula(n)$: $\exists x(n = x * 1000 + 888)$.

Predikat se dokazivosti bazira na izrazu oblika $\exists n Dokazuje(n, f)$, gdje umjesto $Dokazuje$ imamo aritmetičku formulu prvog reda koja provjerava da je n kod dokaza kojemu je kod posljednje formule f. Dugim riječima, da "postoji broj koji kodira dokaz za F kodiranu s f", odnosno "Postoji dokaz za F" ako je f kod aritmetičke formule F. Označimo li kod od X s

[15] Neki smatraju da je Gödelovo otkriće udarac na formalizam, teoriju prema kojoj se matematička istinitost sastoji u matematičkoj izvodivosti odnosno dokazivosti, i to udarac od kojeg se formalizam ne može oporaviti. Motivacija je za takav stav intuicija da je naprosto svaka aritmetička formula ili istinita ili lažna (i da postoji aksiomatizacija koja daje odgovor na to pitanje), koja zajedno s formalizmom i Gödelovim otkrićem čini inkonzistentnu trijadu.

[16] Formule **GL** se mogu promatrati kao sheme za PA, npr. jedna instanca PA sheme $p \to p$, koja je ujedno **GL** teorem, je $2 + 2 = 5 \to 2 + 2 = 5$

[17] Za PA formule s više varijabli, što je nužno dopustiti, možemo uvesti varijabilne kodne riječi, no to ovdje neće biti učinjeno jer je cilj dati samo grub i neformalan opis aritmetizacije aritmetike.

[18] U praksi ne znamo je li kod ispravan, pa je potrebno i to provjeriti, no ovdje zbog prostora to neće biti dalje razrađeno. U npr. [Smith 2011] je dan potpun opis predikata koji su potrebni za aritmetizaciju aritmetike.

$\lceil X \rceil$, a spomenutu formulu $\exists n Dokazuje(n, f)$ s $Bew(f)$, možemo koristiti pokratu $Bew(\lceil F \rceil)$ za $\exists n Dokazuje(n, \lceil F \rceil)$.

Bew je čisto aritmetički predikat u smislu u kojem je "... je prost broj" (ako ga definiramo kao $P(n) = \forall m(\exists k(k * m = n) \to (m = s(0) \vee m = n) \wedge n \neq 0 \wedge n \neq s(0))$ čisto aritmetički predikat. Promatramo li pak $Bew \circ \lceil \rceil$, onda imamo kompoziciju operatora (Bew) i metaoperatora (kodiranje, odnosno $\lceil \rceil$). U zapisu u kojem se javlja, metaoperator kodiranja djeluje od najunutarnijeg javljanja prema vanjskim javljanjima na način da $\lceil F \rceil$ mijenjamo s kodom od F.

Ta će kompozicija biti aritmetička interpretacija modalnog operatora $\Box$ kojeg ćemo kasnije uvesti, tj. $\Box F$ ćemo tumačiti kao $Bew(\lceil F \rceil)$.

3 Sustavi modalne logike

3.1 Motivacija i definicija

Potreba za modalnom logikom prirodno nastaje u situacijama u kojima za odrediti istinitosnu vrijednost neke propozicije nije dovoljno poznavati tek trenutno stanje stvari. Primjeri takvih situacija:

- *Aletička modalna logika.* "Nužno je da p" nije tvrdnja samo o "aktivnom" stanju stvari, o tome je li sada p ili $\neg p$, već o svim uopće mogućim stanjima stvari, već je tvrdnja da u svima njima vrijedi p.
- *Temporalna modalna logika.* "Uvijek je bilo p" tvrdi nešto o svim trenucima koji su prethodili sadašnjem trenutku, tvrdi da u svakom vrijedi p.
- *Epistemička modalna logika.* "Osoba i zna da p" tvrdi da p vrijedi svim mogućim stanjima konzistentnima sa znanjem osobe i. Takvom se formalizacijom zahvaća ideja da je *spoznaja* sužavanje skupa stanja koje osoba doživljava kao moguća.

Svojstva konkretnog modaliteta poput "nužno je", "uvijek je bilo" i "osoba i zna da" možemo formalno promatrati. Svojstvo modaliteta je univerzalno vrijedeća istina poput "ako je uvijek bilo p, tada je uvijek bilo da je uvijek bilo p" u temporalnoj modalnoj logici, ili "ako je nužno p, onda p" u aletičkoj modalnoj logici.

Dane primjere svojstava i brojna druga svojstva možemo formalizirati u proširenju jezika propozicijske logike.

Definicija 1. Modalna propozicijska formula (kraće: formula) *je izraz ϕ, rekurzivno definiran kao:*

$$\phi ::= (F \to G) \mid \Box F \mid \bot \mid prop$$

gdje su F i G također modalne propozicijske formule, a prop propozicijsko slovo iz po volji odabranog prebrojivog skupa poput $\{p, q, p_2, q_2, p_3, ...\}$. Druge klasične operatore propozicijske logike: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ i $\leftrightarrow$ te modalni operator $\Diamond$ shvaćamo kao pokrate, redom:

$$\begin{aligned}
\text{za } F = (G \to \bot) \text{ uzimamo } \neg F &=_{def} G \\
\text{za } F \neq (G \to \bot) \text{ uzimamo } \neg F &=_{def} (G \to \bot) \\
F \wedge G &=_{def} \neg(F \to \neg G) \\
F \vee G &=_{def} (\neg F \to G) \\
F \leftrightarrow G &=_{def} (F \to G) \wedge (G \to F) \\
\Diamond F &=_{def} \neg \Box \neg F
\end{aligned}$$

gdje su F i G modalne propozicijske formule.[19] *Ponekad ispuštamo vanjske zagrade.*

$\Box F$ u temporalnoj modalnoj logici tumačimo kao "Uvijek je bilo F". $\Box P \to \Box\Box P$ u istoj logici čitamo kao "Ako je uvijek bilo P, tada je uvijek bilo da je uvijek bilo P" .

Definicija 2. Jezik modalne propozicijske logike $\mathcal{L}$ *je najmanji skup koji sadrži sve modalne propozicijske formule.*

Definicija 3. Sustav (normalne) modalne logike[20] **ML** *je bilo koji skup koji zadovoljava iduća svojstva:*

1. $\mathbf{ML} \subseteq \mathcal{L}$
2. **ML** *sadrži sve tautologije propozicijske logike (dane nad $\mathcal{L}$), tj.* $PL \vDash F \Rightarrow F \in \mathbf{ML}$
3. *Za $F, G \in \mathcal{L}$ vrijedi* $(\Box(F \to G) \to (\Box F \to \Box G)) \in \mathbf{ML}$ *(aksiomska shema K)*
4. *Za $F, (F \to G) \in \mathbf{ML}$, vrijedi $G \in \mathbf{ML}$ (modus ponens)*
5. *Za $F \in \mathbf{ML}$, vrijedi $\Box F \in \mathbf{ML}$ (necesitacija)*

S prve su tri točke prethodne definicije zadani aksiomi hilbertovskog sustava (sustav aksioma i pravila izvođenja) za **ML**, primjenom četvrte i pete točke kao njegovih jedinih pravila transformacija (modus ponens i necesitacija) prirodno se generira **ML**.

Ako vrijedi $F \in \mathbf{ML}$, u hilbertovskom sustavu postoji dokaz za F i pišemo $\mathbf{ML} \vdash F$.

3.2 Semantika i pouzdanost K

Definicija 4. Kripkeov okvir (kraće: okvir) $\mathcal{F}$ *je uređeni par* (W, R)*, gdje je W neprazan* skup svjetova*, a* $R \subseteq W^2$ relacija dostupnosti.

Definicija 5. Kripkeov model (kraće: model) $\mathcal{M}$ *je uređeni par* $(\mathcal{F}, V)$*, gdje je $\mathcal{F}$ okvir, a V* relacija forsiranja *između skupa svjetova W i propozicijskih slova u $\mathcal{L}$. Model $((W, R), V)$ često pišemo kao (W, R, V).*

Definirajmo istinu u svijetu w modela $\mathcal{M}$. To će kasnije poslužiti za definiciju pojma prepoznavanja formule u svijetu, a pojam prepoznavanja će poslužiti za konstrukciju semantike za sustave modalne logike.

Definicija 6. Istinitost formule F u svijetu w modela $\mathcal{M} = (W, R, V)$ *definiramo rekurzivno. Označavamo s $\mathcal{M}, w \vDash F$ ili kraće $w \vDash F$ kad je jasno o kojem modelu je riječ.*

- *Ako $F = \bot$, tada $w \nvDash F$*
- *Ako $F = p$, tada $w \vDash F$ ako i samo ako wVp*
- *Ako $F = (G \to H)$, tada $w \vDash F$ ako i samo ako vrijedi: $w \nvDash G$ ili $w \vDash H$*
- *Ako $F = \Box G$, tada $w \vDash F$ ako i samo ako $\forall x(wRx \to x \vDash G)$*

[19] Po uzoru na [Čačić 2011], $\neg F$ je definiran posebno za slučaj $F = (G \to \bot)$, naime kao $\neg F =_{def} G$, čime su izbjegnute nepotrebne dvostruke negacije.

[20] U ovom se radu javljaju samo sustavi *normalne* modalne logike, i sve se definicije zapravo odnose na normalne modalne logike, a ne na sve modalne logike uopće. Zbog jednostavnosti su ti termini ovdje poistovjećeni. Sustavi modalne logike bez svojstva normalnosti mogu ne zadovoljiti 1., 3. i 5. svojstvo.

Definicija 7. Formula F je valjana na modelu $\mathcal{M}$ *ako* $(\forall x \in W)(x \vDash F)$*, i pišemo* $\mathcal{M} \vDash F$

Formula F je valjana na okviru $\mathcal{F}$ *ako za svaki* $\mathcal{M}$ *na* $\mathcal{F}$, $\mathcal{M} \vDash F$*, i pišemo* $\mathcal{F} \vDash F$

Formula F je valjana na klasi okvira $\mathcal{S}$ *ako za svaki* $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F} \vDash F$*, i pišemo* $\mathcal{S} \vDash F$

Dodatno, ako je F valjana u bilo kojem svijetu bilo koje strukture, kažemo da je F valjana.

K kao formalni sustav ima sintaksu i semantiku (definiciju istinite formule). Ranije je definirano kakva sintaksna pravila mora zadovoljavati bilo koji sustav modalne logike; sad ćemo definirati pravila specifična za sustav **K**. Potom ćemo definirati pojam prepoznavanja formule, pokazati odnos tog pojma s pojmom izvodivosti te tako dobiti definiciju jedne semantike za **K**.

Definicija 8. Sustav **K** *je najmanji sustav modalne logike.*[21]

Definicija 9. **K** prepoznaje formulu F ako i samo ako je F valjana formula na klasi svih okvira, tj. $\vDash F$.

Teorem 1. Ako $\mathbf{K} \vdash F$ tada **K** prepoznaje formulu F.

Dokaz. Provjerit ćemo sve moguće uzroke javljanja pojedinog retka F u dokazu unutar hilbertovskog sustava za **K**. U svakom od navedenih slučajeva generaliziramo po w i modelu.

- F je propozicijska tautologija. Tada $w \vDash F$ po definiciji istine u w čiji su uvjeti nadskup uvjeta za istinu u semantici propozicijske logike (prva tri uvjeta) i po pouzdanosti propozicijske logike s obzirom na njenu semantiku.
- F je oblika $(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))$ (instanca sheme K). Pretpostavimo $w \vDash \Box(A \to B)$ i $w \vDash \Box A$. Tada po definiciji istine, $\forall x(wRx \to x \vDash A \to B)$ i $\forall x(wRx \to x \vDash A)$, no tada $\forall x(wRx \to x \vDash B)$, što je po definiciji istine $w \vDash \Box B$.
- F je posljedica po modus ponensu od G i $(G \to F)$. Pretpostavimo $w \vDash G$ i $w \vDash (G \to F)$. Po definiciji istine $w \nvDash G$ ili $w \vDash F$, no zbog $w \vDash G$ znamo da nije $w \nvDash G$. Stoga $w \vDash F$.
- F je posljedica po necesitaciji, tj. $F = \Box G$ za neki G takav da $\mathbf{K} \vDash G$. Uzmimo bilo koji x takav da wRx (kako bismo kasnije dobili kondicional, ali u stvari je irelevantno vrijedi li wRx). Kako $\mathbf{K} \vDash G$, $x \vDash G$. x je proizvoljan pa $\forall x(wRx \to x \vDash G)$, odnosno $w \vDash \Box G$.

□

Stoga, termin prepoznavanja možemo zamijeniti terminom semantičkog slijeda, tj. za semantiku **K** uzimamo valjanost na klasi svih okvira.

$$\mathbf{K} \vDash F := \vDash F.$$

Tada po prethodnom teoremu imamo:

Teorem 2. **K** je pouzdan, tj. $\mathbf{K} \vdash F \Rightarrow \mathbf{K} \vDash F$.

S obzirom na to da je po definiciji svaki drugi sustav modalne logike nadskup **K**, provjera pouzdanosti za bilo koji drugi sustav samo je provjera vrijedi li slučaj nalik drugom ispitanom u prethodnom dokazu, ali ne za shemu K već za onu shemu ili sheme kojima taj sustav nadograđuje **K**. Razmotrit ćemo semantiku za sustav **K4**.

Kako notacija ne bi bila nepotrebno komplicirana, uvedimo sljedeći zapis: ako je svaka instanca I sheme formula F takva da $\mathbf{ML} \vDash I$, pišemo $\mathbf{ML} \vDash F$, analogno za $\vdash$.

[21] Slovo K je inicijal prezimena Saula Kripkea (r. 1940, američki logičar i filozof), zaslužnog za neke od osnovnih rezultata u tzv. semantici mogućih svjetova ili relacijskoj semantici modalne logike, koja se koristi i u ovom radu. Otprilike istovremeno su do sličnih rezultata došli i Jaakko Hintikka, Richard Montague te Stig Kanger (po kome se uz Kripkea relacijska semantika ponekad naziva i Kripke-Kangerovom semantikom).

Definicija 10. Shema formula F jako karakterizira danu klasu okvira $\mathcal{S}$ *akko* $\mathcal{S} = \{\mathcal{F} | \mathcal{F} \vDash F\}$

Razmotrimo tzv. "shemu 4". Shema 4 glasi $\Box F \to \Box\Box F$. Ako je nužno, nužno je da je nužno; ako je uvijek bilo, uvijek je bilo da je uvijek bilo; ako znam, onda znam da znam[22]; ako je moralno, onda je moralno da je moralno itd.

Treba (prema definiciji jake karakterizacije) pokazati jednakost skupova, što pokazujemo s dvije podskupovnosti.

Uvjet tranzitivnosti je $wRx \wedge xRy \Rightarrow wRy$.

Teorem 3. Shema formula 4 jako karakterizira klasu tranzitivnih okvira

Dokaz. Pretpostavimo da je shema 4 valjana na okviru $\mathcal{F}$, tada je valjana i njena instanca $\Box p \to \Box\Box p$. Treba pokazati da je $\mathcal{F}$ tranzitivan. Neka je w proizvoljni svijet iz W. Postavimo $xVp \Leftrightarrow wRx$, pa je antecedens instance ispunjen u w. Kako modus ponensom u w vrijedi $\Box\Box p$, po definiciji istine u modelu imamo da u svim svjetovima vidljivima iz bilo kojeg x dostupnog u w vrijedi p. Skup svjetova x za koje postoji put $w \to \circ \to x$ je dakle barem podskup skupa svjetova x za koje postoji put $w \to x$, što je preformulirani uvjet tranzitivnosti.

U suprotnom smjeru, pretpostavimo da imamo tranzitivan okvir i da vrijedi $w \vDash \Box p$. Uzmimo da wRu, uRv za proizvoljni u, v. Zbog tranzitivnosti mora vrijediti wRv. Kako $w \vDash \Box p$, tada $v \vDash p$, a kako je v bio proizvoljan i uRv, tada $u : \Box p$. Uz to wRu i u je proizvoljan pa $w \vDash \Box\Box p$. $\Box$

Dokazima jake karakterizacije sheme F ujedno dokazujemo i pouzdanost sustava nastalog dodavanjem instanci F u skup aksioma sustava **K**. Dobiveni sustavi se često označavaju s **KF**, npr. **K4**.

Semantika tih sustava je tada klasa okvira koja je jako karakterizirana shemama tog sustava. Primjerice, semantika **K4** će biti definirana preko valjanosti nad klasom tranzitivnih okvira u istom smislu u kojoj je semantika **K** ranije definira preko valjanosti nad klasom svih okvira.

Ilustrirajmo na primjeru **K4** vezu između jake karakterizacije i pouzdanosti. Dokazom pouzdanosti za **ML**, u ovom slučaju za **K4**, pokazuje se da nijedna primjena sintaktičkog pravila transformacije ne može iz istine proizvesti neistinu.

Pretpostavimo da $\mathbf{K4} \vdash F$. Za sve moguće uzroke pojave retka s formulom F od ranije znamo da $\mathbf{K4} \vDash F$, osim ako je F instanca sheme 4. U potonjem slučaju želimo da F bude **K4**-istinita formula. Zbog toga moramo namjestiti semantiku za **K4** na onu koja će sigurno učiniti svaku moguću instancu sheme 4 istinitom. Dokazom jake karakterizacije smo utvrdili da je ta semantika *valjanost na skupu tranzitivnih okvira.*

3.3 Potpunost K

Treba pokazati da $\mathbf{K} \vDash F \Rightarrow \mathbf{K} \vdash F$. Dakle, imajući na umu pozitivan rezultat o pouzdanosti (obrat nove tvrdnje), pitamo se jesu li sve valjane formule u **K** upravo one koje su izvodive u **K**?

Definicija 11. Konačan skup Γ je **ML**-konzistentan *akko* $\mathbf{ML} \nvdash \neg \bigwedge \Gamma$

Γ je **ML**-konzistentan akko **ML** ne može sintaktički oboriti konjunkciju tvrdnji iz Γ. Drugim riječima, ako se ispravnim zaključivanjem s konjunkcije formula iz Γ ne može doći do kontradikcije.

Definicija 12. Formula G je potformula od F:

- *ako je* $F = G$
- *za* $F = \Box H$, *ako je* G *potformula od* H

[22]Jesmo li toliko introspektivni? Ovo je u epistemologiji poznato kao K-K teza.

- *za* $F = (H \to J)$*, ako je* G *potformula od* H *ili* J [23]

Definicija 13. Formula G je termin od F *ako je* G *potformula od* F *ili* $\neg G$ *potformula od* F*. Skup* $term(F)$ *je skup* $\{G \in \mathcal{L} | G \text{ je termin od } F\}$

Primjerice $(\Box P \to P)$ i $\neg(\Box P \to P)$ su neki od termina $\Box(\Box P \to P) \to P$.

Definicija 14. Γ je **ML**-maksimalno konzistentan skup (**ML**-mcs) s obzirom na F *akko je* Γ **ML**-*konzistentna,* $\Gamma \subseteq term(F)$ *i ne postoji* $\Gamma' \supset \Gamma$ *koji je* **ML**-*konzistentan i za koji* $\Gamma' \subseteq term(F)$*.*

Drugim riječima, Γ je **ML**-maksimalno konzistentan skup s obzirom na F ako je Γ podskup termina od F čija je konjunkcija neoboriva u Γ te za svaku potformulu F' od F vrijedi da je ili F', ili negacija F' element od Γ.

Teorem 4. **K** je semantički potpun, tj. $\mathbf{K} \models F \Rightarrow \mathbf{K} \vdash F$.

Dokaz. Za dokaz kontrapozicijom, treba pokazati da za bilo koju formulu F vrijedi da ako $\mathbf{K} \nvdash F$, tada u nekom modelu $\mathcal{M} \not\models F$ (pa F nije valjana).

Uzmimo proizvoljnu formulu D za koju $\mathbf{K} \nvdash D$ i neka $\Gamma = term(D)$.

D je formula pa je konačne duljine, stoga je njenih termina samo konačno mnogo, dakle Γ je konačan skup.

Ako $\{\neg D\}$ nije **K**-konzistentan, tada $\mathbf{K} \vdash D$, suprotno pretpostavci.

Dakle, $\{\neg D\}$ je **K**-konzistentan.

Širimo skup $y = \{\neg D\}$ na način da iz svakog para potformule iz D i njene negacije uzimamo onu formulu F za koju je $y \cup \{F\}$ **K**-konzistentan. Primijetimo da što god odabrali iz tog para, odabrat ćemo neki termin od D. Nikad ne možemo *istovremeno* odabrati obje formule jer $(X \wedge \neg X) \wedge \bigwedge \Gamma^*$ očito nije **K**-konzistentno ni za koji Γ^* (pa ni y); uvijek možemo odabrati jednu opciju između X i $\neg X$ jer inače i $\mathbf{K} \vdash \neg(X \wedge \bigwedge \Gamma^*)$ i $\mathbf{K} \vdash \neg(\neg X \wedge \bigwedge \Gamma^*)$, tada trivijalnim transformacijama $\mathbf{K} \vdash (X \wedge \neg X) \vee \neg \bigwedge \Gamma^*$, odnosno $\mathbf{K} \vdash \neg \bigwedge \Gamma^*$, što je za slučaj $y = \Gamma^*$ suprotno pretpostavci da je skup y **K**-konzistentan.

No, odabir nije nužno uvijek jedinstven, npr. za $D = \neg(p \vee q)$ i $y = \{p \vee q\}$, idući korak bi mogao biti odlučivanje hoćemo li dodati termin p ili termin $\neg p$. Kojim god putem krenuli, y će ostati **K**-konzistentan. U tom slučaju biramo npr. bacanjem novčića.

S obzirom na to da ćemo nakon konačnog broja koraka očito iscrpiti sve parove termina i njihovih negacija, dobit ćemo skup koji je **K**-mcs jer će jedini preostali termini biti upravo negacije termina koje smo dodali u y.

Gradimo protuprimjer tvrdnji $\mathbf{K} \models D$, a to je model $\mathcal{M}$ za koji $\mathcal{M} \not\models D$.

$$W = \{S | S \text{ je } \mathbf{K}\text{-mcs s obzirom na } D\}$$

Uvjet da bismo W zvali skupom svjetova je njegova nepraznost. Gornja argumentacija pokazuje da je $y \in W$, pa je W dobro definiran.

Za relaciju forsiranja V te relaciju dostupnosti R biramo:

$$xVp \iff p \in x$$
$$wRx \iff \text{za svaku formulu } \Box B \in w : B \in x$$

Potonjim se uvjetom u stvari uspostavljaju sve moguće veze između svjetova u modelu, osim onih koje bi bile u kontradikciji s uvjetom istinitosti za formule oblika $\Box F$. Dakle, eliminiraju se veze koje bi izlazile iz svijeta u kojem vrijedi $\Box F$ te ulazile u svjetove u kojima vrijedi $\neg F$.

[23] Neformalno: G je potformula od F akko je G jedan od stupaca u (proširenoj) semantičkoj tablici za F.

Kao i u [Boolos 1993], umjesto direktnog dokaza da je $\mathcal{M} = (W, R, V)$ doista model u kojem $\mathcal{M} \not\models D$, prvo će biti dan dokaz da je za bilo koju **ML** u ovom koraku dokaza potpunosti povoljan odabir bilo koji model koji zadovoljava iduća svojstva za relaciju dostupnosti. Time će kasniji dokaz potpunosti **GL** biti do te točke ekvivalentan dokazu za **K**.

1. (W, R) je u klasi okvira koja jako korespondira shemama **ML** čiju potpunost pokazujemo, u ovom dokazu shemi K

2. $\Box B \in w \iff \forall x(wRx \to B \in x)$, za svaku potformulu $\Box B$ od D

Primijetimo da je drugi uvjet vrlo nalik uvjetu istine za formule oblika $\Box F$ kad se relacija forsiranja definira kao $xVp \iff p \in x$. To nije slučajno; naš model zapravo gradimo na način da elementi jednog svijeta budu ujedno ono što u tom svijetu vrijedi.

Tvrdimo: ako je A potformula od D, tada: $A \in w \iff w \models A$. Za propozicijska je slova očito po definiciji V, također i $\perp$ ($\perp$ nikad nije **ML**-konzistentna, pa je trivijalno zadovoljen uvjet).

Za slučaj $A = (F \to G)$, vrijedi li tvrdnja za potformule F i G, tada zbog maksimalne konzistentnosti od w vrijedi $A \notin w$ akko $\neg A \in w$, akko $F \in w$ i $\neg G \in w$, odnosno (jer tvrdnja vrijedi za F i G) akko $w \models F$ i $w \models \neg G$, akko $w \not\models A$.

Za slučaj $A = \Box F$ i uz pretpostavku da tvrdnja vrijedi za F: neka $A \in w$, tada prema (2.): $\forall x(wRx \to F \in x)$, prema pretpostavci indukcije tada $\forall x(wRx \to x \models F)$, a po definiciji istine u svijetu modela, tada $w \models A$. Time su svi slučajevi provjereni.

Imamo: $\neg D \in y \iff D \notin y \iff y \not\models D$. $y \in W$ pa $\mathcal{M} \not\models D$, što smo i tražili. Uvjet (1.) je osiguranje da nam je $\mathcal{M}$ relevantan, inače bismo možda baratali modelom čija se zadovoljavanja ne ubrajaju u skup onih preko kojih definiramo istinu u sustavu u kojem trenutno radimo. Za **K** je svaki model relevantan, pa nisu potrebne dodatne provjere.

Ostaje provjeriti relaciju dostupnosti R ranije definiranu s: $wRx \iff$ za svaku formulu $\Box B \in w$ vrijedi da $B \in x$. Prvi uvjet je ranije provjeren (**K** nema restrikcija na R), preostaje provjeriti $\Box B \in w \iff \forall x(wRx \to B \in x)$.

Pretpostavimo $\Box B \in w$. Ako wRx, tada $B \in x$ (inače ne bi ni postojala veza wRx), a zbog proizvoljnosti x slijedi da $\forall x(wRx \to B \in x)$.

Pretpostavimo $\Box B \notin w$ i pokažimo da $\exists x(wRx \land B \notin x)$. Neka je $X = \{\neg B\} \cup \{C | \Box C \in w\}$. Da X nije konzistentan, primjenom modalnog modus ponensa imali bismo: $\mathbf{K} \vdash \Box \bigwedge_{\Box C \in w} C \to \Box B$. Tada bi dakle $\bigwedge_{\Box C \in w} \Box C \to \Box B$ bila teorem. Kako su formule slijeva (iz skupa $\{\Box C | \Box C \in w\}$) sadržane u w, onda je u w, jer je w **K**-mcs, sadržana i $\Box B$. Kontradikcija, pa je X konzistentan a time postoji i x koji je **K**-mcs i nadskup od X.
Zbog $\{C | \Box C \in w\} \subseteq X \subseteq x$ vrijedi wRx, a kako je po pretpostavci $\neg B \in x$ imamo $\exists x(wRx \land B \notin x)$.

$\Box$

4 Gödel-Löb sustav

4.1 Logika dokazivosti

Kao što je već spomenuto u poglavlju o formalnim aritmetikama, u ovom radu nije presudna veza između **GL** i aritmetike. No zbog činjenice da se **GL** barem do sada istraživao upravo zbog te veze, bit će skicirane osobine PA koje ju čine pogodnom za formalizaciju u obliku normalne modalne logike, s predikatom dokazivosti (u kompoziciji s metaoperatorom kodiranja) kao modalnim operatorom.

Ta veza je gotovo u potpunosti opisana u [Smith 2011], osim dokaza kineskog teorema o ostacima u PA koji je dan npr. u [Smith 2013].

GL i termin "logika dokazivosti" se često koriste kao sinonimi. Međutim, za razliku od primjerice "logike znanja" gdje pokušavamo formalizirati intuitivno poimanje predikata "znati da ..." isprobavajući različite epistemičke principe, kod logike dokazivosti možemo unaprijed karakterizirati skup teorema. Mogli bismo reći da je "logika znanja" izum jer konstruiramo primjerice idealnog spoznavatelja, a "logika dokazivosti" otkriće jer tražimo aksiomatizaciju strukture za koju već posjedujemo karakterizaciju.

Logika dokazivosti **PRL** je skup modalnih formula dobiven pomoću skupa teorema PA na način da se u **PRL** nalaze sve modalne formule koje imaju svojstvo da se zamjenom svih pojava $\Box F$ s $Bew(\ulcorner F \urcorner)$, a F s bilo kojom PA formulom uz uvjet da u jednoj modalnoj formuli isto slovo zamjenimo istom PA formulom, dobije teorem PA. To je karakterizacija logike dokazivosti.

Kroz povijest je bilo više pokušaja pronalaženja aksiomatizacije **PRL**. Pritom se nije znalo ni postoji li ta aksiomatizacija, pa tako niti da će se raditi o relativno jednostavnom sustavu modalne logike.

Da bi **PRL** bio sustav modalne logike, moraju biti zadovoljena iduća svojstva.

- **PRL** $\subseteq \mathcal{L}$

  Slijedi po pretpostavci da imamo skup modalnih formula.

- **PRL** sadrži sve tautologije propozicijske logike (dane nad $\mathcal{L}$), tj. $PL \models F \Rightarrow F \in \mathbf{ML}$

  PA je nadskup logike prvog reda pa između ostalog sadrži propozicijsku logiku.

- Za $F \in \mathbf{PRL}$ mora vrijediti $\Box F \in \mathbf{PRL}$ (*necesitacija*)

  Nije trivijalno za pokazati. Jedan je način pokazati da PA može dokazati svaku istinitu formulu F koja spada u posebnu klasu formula Σ_1. Radi se o formulama koje su PA-dokazivo ekvivalentne formulama u kojima su jedini kvantifikatori egzistencijalni te poredani na samom početku formule, te potom pokazati da je formula $Bew(\ulcorner F \urcorner)$ uvijek u toj klasi. Potonji dio nije težak jer je $\ulcorner F \urcorner$ izraz oblika $s(...(s(0))...)$, tj. $\ulcorner F \urcorner$ ne utječe na logičku strukturu formule.

- Za $F, G \in \mathcal{L}$ mora vrijediti $(\Box(F \to G) \to (\Box F \to \Box G)) \in \mathbf{PRL}$ (*aksiomska shema K*)

  Također nije trivijalno za pokazati, no intuitivno je posljedica jednostavne činjenice da ako imamo dokaz za F i dokaz za $F \to G$, tada je dokaz za G mehanički sastavljiv spajanjem spomenutih dokaza te dodavanjem retka G. G smijemo dodati jer je posljedica po modus ponensu, koji je kao dio propozicijske logike kroz logiku prvog reda sadržan u PA.

- Za $F, (F \to G) \in \mathbf{PRL}$, vrijedi $G \in \mathbf{PRL}$ (*modus ponens*)

  Slijedi iz deduktivne zatvorenosti PA.

Preciznim bismo dokazima ispunjenja navedenih uvjeta pokazali da je **PRL** sustav modalne logike. No, i dalje ne bismo znali koji je to sustav. Solovay je pokazao **PRL** = **GL**.

4.2 Pouzdanost i potpunost GL

Sada konačno definiramo **GL**.

Definicija 15. **GL** ili Gödel-Löb sustav *je proširenje sustava* **K** *instancama sljedeće aksiomske sheme*

$$\Box(\Box F \to F) \to \Box F$$

koju nazivamo formalizirani Löbov aksiom ili samo Löbov aksiom ili L.

Za binarnu relaciju R kažemo da je konverzno dobro utemeljena ako ne postoji niz $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ takav da a_0Ra_1, a_1Ra_2, ..., a_nRa_{n+1}, ... Dakle, ako ne možemo "beskonačno R-putovati".

Teorem 5. Klasa tranzitivnih konverzno dobro utemeljenih (KDU) okvira jako karakterizira **GL**.

Dokaz. Uzmimo tranzitivan KDU okvir $\mathcal{F}$ i pokažimo da $\mathcal{F} \vDash L$.

Uzmimo instancu $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ sheme L i pretpostavimo da za proizvoljni svijet w proizvoljnog modela nad $\mathcal{F}$ vrijedi njen antecedens, tj. da $w \vDash \Box(\Box p \to p)$.

Kada bi bilo $w \nvDash \Box p$, tada $w \vDash \Diamond\neg p$. Označimo svijet u kojem se ostvaruje $\neg p$ s x. Tada $x \vDash \Box p \to p$ jer wRx i $\Box(\Box p \to p)$, ali i $x \vDash \neg p$ jer wRx i $w \vDash \Diamond\neg p$. Stoga $x \vDash \neg\Box p$, pa slično kao i ranije $x \vDash \Diamond\neg p$. Označimo s y svijet u kojem se taj $\neg p$ ostvaruje (jasno, xRy). Primijetimo dvije stvari:

1. $x \neq y$, inače xRx pa imamo beskonačnu petlju.
2. S obzirom na to da je $\mathcal{F}$ tranzitivan te wRx, xRy, slijedi wRy, pa kao i ranije mora postojati z u kojem ćemo ispuniti $\neg p$, jasno z takav da yRz.

Kad bismo nastavili razmatranje, bili bismo primorani pristati na postojanje beskonačnog niza svjetova w, x, y, z itd. No, kako je $\mathcal{F}$ KDU, prije ili kasnije će ponestati novih dostupnih svjetova, a na stare se ne smijemo vraćati zbog petlji. Pretpostavka da $w \vDash \Box(\Box p \to p)$ i istovremeno $w \nvDash \Box p$ vodi u kontradikciju, pa generalizacijom po w i modelu zaključujemo $\mathcal{F} \vDash L$.

U drugom smjeru, krećemo od $\mathcal{F} \vDash L$. $\mathcal{F}$ je tranzitivan jer

$$\mathbf{GL} \vdash \Box p \to \Box\Box p$$

Naime:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} &\vdash \Box p \to \Box(\Box(p \wedge \Box p) \to p) && && (1)\\
\mathbf{K} &\vdash \Box(\Box(p \wedge \Box p) \to p) \to \Box(\Box(p \wedge \Box p) \to (p \wedge \Box p)) && && (2)\\
\mathbf{K} &\vdash \Box p \to \Box(\Box(p \wedge \Box p) \to (p \wedge \Box p)) && (1)+(2) && (3)\\
\mathbf{GL} &\vdash \Box(\Box(p \wedge \Box p) \to (p \wedge \Box p)) \to \Box(p \wedge \Box p) && && (4)\\
\mathbf{GL} &\vdash \Box p \to \Box(p \wedge \Box p) && (3)+(4) && (5)\\
\mathbf{K} &\vdash \Box(p \wedge \Box p) \to \Box\Box p && && (6)\\
\mathbf{GL} &\vdash \Box p \to \Box\Box p && (5)+(6) && (7)
\end{aligned}
$$

Ostaje pokazati da je okvir KDU. Pretpostavimo da nije. Tada postoji niz $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ za koji vrijedi da a_iRa_{i+1}, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Uzmimo skup svjetova S koji se javljaju u odabranom nizu, tj. $S = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$.

Taj skup može biti i konačan, primjerice u okviru $(\{a, b\}, \{(a, a)\})$ je takav skup jedinstven i jednak $\{a\}$. Postavimo forsiranje tako da $\neg p$ bude ostvareno samo u svjetovima iz S.

Za svijet $w \in S$ vrijedi $w \vDash \Box p \to p$ jer antecedens nije ispunjen. Naime, svakom je svijetu a_i iz S dostupan svijet a_{i+1} u kojem vrijedi $\neg p$.

Za svijet $w \notin S$ vrijedi $w \vDash \Box p \to p$ jer za $w \notin S$ vrijedi $w \vDash p$.

S obzirom na to da za svaki svijet x vrijedi $x \vDash \Box p \to p$, za proizvoljno odabrani svijet $w \in W$ vrijedi $w \vDash \Box(\Box p \to p)$.

Međutim, ni u jednom od svjetova iz S nije (a dovoljno je i da u samo jednom nije) istinito $\Box p$. To je kontradikcija s valjanošću L zbog koje skup S ne može postojati. Tada je $\mathcal{F}$ KDU. $\Box$

Za **GL** dakle odabiremo semantiku: formula je istinita akko je valjana na skupu tranzitivnih konverzno utemeljenih okvira.

Teorem 6. **GL** je pouzdan, tj. $\mathbf{GL} \vdash F \Rightarrow \mathbf{GL} \vDash F$.

Dokaz. Slijedi iz načina na koji je **GL** definiran (**K** uz shemu L) te teorema pouzdanosti za **K** i teorema jake karakterizacije za **GL**. $\square$

Teorem 7. **GL** je semantički potpun, tj. $\mathbf{GL} \vDash F \Rightarrow \mathbf{GL} \vdash F$.

Dokaz. Kao što je spomenuto u dokazu za **K**, dovoljno je odabrati relaciju dostupnosti te provjeriti zadovoljava li dva uvjeta:

1. R je tranzitivna KDU relacija
2. $\Box B \in w \iff \forall x(wRx \to B \in x)$, za svaku potformulu od D oblika $\Box B$

Za **GL** uzimamo:

$$\begin{aligned} wRx \iff & \text{za svaku formulu } \Box B \in w \text{ vrijedi } B,\ \Box B \in x \\ & \text{i uz to za neku formulu } \neg\Box A \in w \text{ vrijedi } \Box A \in x \end{aligned}$$

Za (1) bi trebalo pokazati da je R tranzitivna i KDU; dovoljno je pokazati da je tranzitivna i irefleksivna. Uvjet irefleksivnosti je $\forall x \neg xRx$. Jer, jedini način da ostvarimo beskonačni put u konačnom irefleksivnom okviru (W je konačan zbog konačnosti formule D, v. dokaz za **K**) je da imamo netrivijalnu petlju ($a \to x_1 \to ... \to x_n \to a$, $n \geq 1$). Zbog tranzitivnosti bi tada bilo $a \to a$, što je u sukobu s irefleksivnošću.

Pretpostavimo wRu i uRv. Tada za bilo koji $\Box B \in w$ vrijedi $\Box B \in u$, pa je B, $\Box B \in v$. Za (barem jednu) formulu $\neg\Box A \in w$ imamo $\Box A \in u$, a kako $\Box A$ ima oblik $\Box B$, mora vrijediti $\Box A \in v$. Oba su uvjeta ispunjena pa imamo wRv, što je i traženo za tranzitivnost R.

Irefleksivnost trivijalno slijedi iz uvjeta postojanja $\neg\Box A \in w$ za koju $\Box A \in x$ i toga da svjetovi ne mogu biti inkonzistentni zbog definicije istine u svijetu modela.

Za prvi smjer u (2), ako je $\Box B \in w$ i wRx, onda svakako $B \in x$, inače ne bi ni bilo veze wRx.

Preostaje još pokazati da ako $\forall x(wRx \to B \in x)$, tada $\Box B \in w$.

Uzmimo da $\Box B \notin w$. Neka je $X = \{\neg B, \Box B\} \cup \{C, \Box C | \Box C \in w\}$. Da X nije **GL**-konzistentan, primjenom modalnog modus ponensa imali bismo: $\mathbf{GL} \vdash \Box \bigwedge_{\Box C \in w}(C \wedge \Box C) \to \Box(\Box B \to B)$. Tada bi $\bigwedge_{\Box C \in w} \Box C \to \Box(\Box B \to B)$ bila teorem u **GL**, jer $\mathbf{GL} \vdash \Box C \to \Box\Box C$ pa smo mogli izbaciti $\Box C$ iz $\Box(C \wedge \Box C)$.

Kako su formule slijeva (iz skupa $\{\Box C | \Box C \in w\}$) sadržane u w, onda je u w sadržana i $\Box B$. To nije posve očito kao kod **K** i posljedica je toga da je $\Box B$ sadržana u D, da vrijedi $\mathbf{GL} \vdash \Box(\Box B \to B) \to \Box B$ i da je w **GL**-mcs. Primijetimo da je X odabran u osnovi jednako kao i za **K**, novost su formule $\Box B$ i $\Box C$, dodane zbog uvjeta na wRx. Dakle, kao i ranije kontradikcija, pa je X konzistentan a time postoji i x koji je **GL**-mcs i nadskup od X. Zbog $\{C, \Box C | \Box C \in w\} \subseteq X$ te $\neg\Box B \in w$ (w je **GL**-mcs i $\Box B \notin w$) i $\Box B \in x$ (B igra ulogu A u drugom uvjetu), vrijedi wRx. K tome je $\neg B \in x$, pa konačno zaključujemo $\exists x(wRx \wedge B \notin x)$. $\square$

4.3 Stabla za GL

Kako bi notacija bila što jednostavnija, u ovom će se poglavlju često koristiti samo $\mathcal{L}$ bez pokrata poput $\neg$. Stabla za **GL** nalik su propozicijskim stablima. Osnovna je razlika u tome što se na granama uz formule mogu nalaziti i nova stabla. Definirajmo stabla preciznije.

Grana je konačan niz formula na koji se nastavlja konačan niz stabala. Grana može biti bez formula i bez stabala, ali ne bez oboje istovremeno.

Dvije različite grane mogu biti u odnosu podgrane i nadgrane.

Jedna grana je podgrana najviše jedne grane, a nadgrana nijedne (*nerazgranata*) ili dvije grane (*razgranata*).

Stablo je konačan skup grana u kojem:

- Postoji točno jedna grana označena kao *korijen*.
- Korijenska grana nema nadgranu.
- Sve grane osim korijenske imaju nadgranu.
- Ni za koju granu g_0 i ni za koji $n \in \mathbb{N}$, podgrana-potomak n.-te razine g_n nije $g_0 = g_n$.

Definicija stabla kao skupa grana i grane kao niza koji može sadržavati stablo ne upada u poročni regres jer bismo načelno mogli definirati stablo nultog reda čije grane ne sadrže stabla, stablo prvog reda čije grane mogu sadržavati stabla nultog reda itd.

Zatvorimo li tranzitivno relaciju podgrane i nadgrane prirodno dobivamo relaciju pretka i nasljednika. Tada možemo posljednji uvjet za stablo prirodnije definirati na način da nijedna grana nije svoj potomak.

Formula (stablo) je **na** grani ako su nalazi u nizu formula (stabala) te grane, ili se nalazi u nizu formula (stabala) nekog pretka.

Grana je **zatvorena** ako postoji kontradikcija među dvije formule na njoj ili se na njoj nalazi formula $\perp$ ili se na njoj nalazi zatvoreno stablo ili posjeduje podgrane i sve su joj podgrane zatvorene.

Stablo je **zatvoreno** ako je njegova korijenska grana zatvorena.

Aktivne grane su sve koje su nerazgranate i nezatvorene.

Pod **aktivnim mjestima** trenutne grane podrazumijevamo sve aktivne grane nasljednike trenutne grane, uključno s trenutnom granom (ako je aktivna, naravno).

Stablo uvijek započinjemo upisivanjem željene formule kao prve formule korijenske grane. Pravila kojima potom gradimo ostatak stabla:

- za $(F \to G) \to \perp$, na sva aktivna mjesta trenutne grane dodajemo F te $G \to \perp$.
- za $F \to G$, $G \neq \perp$, granamo sva aktivna mjesta trenutne grane na granu s $F \to \perp$, i granu s G

Ta pravila koristimo dok god možemo, a potom ako možemo koristimo novo, modalno, pravilo:

- za $\Box F \to \perp$, na sva aktivna mjesta trenutne grane "otvaramo prozor u mogući svijet" (*Boolos*) u kojem F nije ispunjeno (u kojem je $F \to \perp$). Preciznije: na sva aktivna mjesta dodajemo *novo* stablo (sa strane, odvojeno od glavnog stabla, ili u pravokutnom okviru izravno na grani starog stabla) s određenim skupom premisa. Moguće je da će na kraju cijelog postupka glavno stablo imati prozore unutar prozora ... unutar prozora.

  Skup premisa koji čini početnu granu novog stabla prilikom korištenja modalnog pravila je:

  - $\star$ $F \to \perp$,
  - $\star$ $\Box F$ i
  - $\star$ X, $\Box X$ za svaku formulu $\Box X$ s trenutnog aktivnog mjesta. Aktivnih mjesta može biti više te se zbog ovog dijela pravila korijenske grane novih stabala čak i za istu pojavu formule $\Box F \to \perp$ u stablu mogu razlikovati.

Kad više ne možemo iskoristiti modalno pravilo, ponovno pokušavamo iskoristiti sva propozicijska pravila u novonastalim prozorima, i tako u krug. Nazovimo jednu iteraciju prolaska kroz sva pravila **ciklusom**.

Teorem 8. **GL** *je odlučiva metodom stabala. Izvodivost proizvoljne formule F ispitujemo tako da gradimo stablo za $F \to \bot$. Nakon konačno mnogo koraka ne možemo iskoristiti niti jedno pravilo. Ako je tada glavno stablo zatvoreno formula F je teorem, inače nije.*

Dokaz. Uzmimo $Q := \{\Box B | \Box B$ je potformula od $F\}$, F je proizvoljna formula.

Uočimo da smo u svakom ciklusu na novoj razini ugnježdenosti s obzirom na prethodni ciklus. Naime, u prvom ciklusu propozicijska pravila barataju s osnovnim stablom (bez prozora), a modalno pravilo dodaje prozore $w_1, ..., w_m$. U drugom ciklusu propozicijska pravila barataju s formulama u prozorima w_i, $1 \le i \le m$ a modalno pravilo unutar tih postojećih prozora dodaje nove prozore itd. Jedino što se dok smo na razini ugnježdenosti k može promijeniti na razinama $i < k$ jest da neke otvorene grane postanu zatvorene.

Primjerice, ako smo na razini 0 otvorili stabla w_1 na grani g_1 i w_2 na grani g_2, tada se na razini 1 s g_1 i g_2 može dogoditi samo da ostanu otvorena ili postanu zatvorena. Originalno stablo više ne može dobiti nove grane, niti ponovno otvoriti stare.

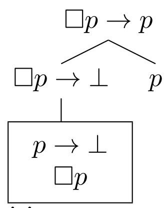
Primijetimo i da jedine formule $\Box F \to \bot$ bilo gdje u stablu mogu biti samo one za koje $\Box F \in Q$. Razlog je u tome što nijedno pravilo ne može proizvesti formulu koja će sadržavati $\Box F$, a da pritom $\Box F \notin Q$.

Zbog konačnosti metode stabala za propozicijsku logiku[24], treba samo provjeriti hoćemo li modalno pravilo moći upotrijebiti konačno mnogo puta.

Ako otvaramo prozor čiju početnu granu označimo s g_2 na nekoj grani g_1, tada, po modalnom pravilu, g_2 sadržava sve formule oblika $\Box F$ koje sadrži g_1. Uvrstimo li formule tog oblika u skup K_1, tada dakle dodajemo $|K_1|$ formula iz skupa $K_1 \subseteq Q$ i znamo da vrijedi $|K_1| \le |Q|$. No, ako je g_2 započet zbog formule $\Box A \to \bot$, tada g_1 ne sadrži $\Box A$ (inače bi g_1 bila zatvorena grana pa ne bismo niti otvarali stablo s korijenom g_2), a g_2, po modalnom pravilu, sadrži $\Box A$. Zbog toga je skup formula K_2 koje dodajemo u drugom ciklusu modalnog pravila $K_2 \supset K_1$, pa će se nakon konačno mnogo provođenja modalnih ciklusa pojaviti ciklus j takav da bi K_j zahtjevalo $|K_j| > |Q|$, što je nemoguće jer nema više od $|Q|$ mogućih različitih formula oblika $\Box F$.

Sad treba pokazati da ako je stablo zatvoreno za $F \to \bot$, tada je F teorem.

Definirajmo **reprezentaciju** stabla kao disjunkciju s po jednim disjunktom za svaku nerazgranatu granu tog stabla, te je svaki disjunkt konjunkcija svih formula te nerazgranate grane i reprezentacija svih stabala prefiksiranih s $\Diamond$.



Primjerice, reprezentacija stabla na slici je

$$\big((\Box p \to p) \land (\Box p \to \bot) \land \Diamond\,((p \to \bot) \land \Box p)\big) \lor \big((\Box p \to p) \land p\big)$$

Reprezentacija stabla je na samom početku gradnje stabla jednaka korijenu glavnog stabla. Reprezentacija stabla nakon primjene svakog pravila **GL**-slijedi iz korijena stabla. Za prva dva pravila je to posve očito i bez raspisivanja. Za treće, modalno, pravilo, pokazat ćemo da iz svakog disjunkta reprezentacije prije primjene modalnog pravila slijedi odgovarajući disjunkt reprezentacije nakon primjene modalnog pravila. Modalnim pravilom nikad ne dodajemo ili

[24]Svako propozicijsko pravilo koje proizvodi nove objekte u stablu ("produktivno" pravilo) dodaje samo strogo kraće formule od početne: zbog odozdo i odozgo ograničene duljine formula, prije ili kasnije će se primjenom propozicijskih pravila dodavati samo formule kraće od onih za koji postoji produktivno propozicijsko pravilo.

brišemo grane trenutne razine stabla pa ima smisla govoriti o odgovarajućim disjunktima prije i poslije primjene.

Neka je A disjunkt stare reprezentacije koji odgovara promatranoj grani stabla, a B reprezentacija novog stabla koja dodajemo na promatranu granu, dakle onu kojoj odgovara A. Ako A odgovara zatvorenoj grani, tada je $A \equiv_{\mathbf{GL}} \bot \equiv_{\mathbf{GL}} \bot \land \Diamond B \equiv_{\mathbf{GL}} A \land \Diamond B$ pa smo gotovi jer novi disjunkt slijedi iz odgovarajućeg starog (štoviše, ekvivalentni su). Ako A nema konjunkta oblika $\Box F \to \bot$, tada grana ostaje kakva je i bila.

Preostaje slučaj kad A odgovara zasad otvorenoj grani i bar je jedan konjunkt oblika $\Box F \to \bot$. Ako A ima više konjunkta tog oblika ponavljamo identičan postupak više puta. Stoga ćemo pretpostaviti da je samo jedna formula oblika $\Box F \to \bot$.

Uzimamo $B := (F \to \bot) \land \Box F \land \bigwedge(X \land \Box X)$. Konjunkcija prolazi kroz sve konjunkte oblika $\Box X$ u A, kako je opisano ranije.

$$\mathbf{GL} \vdash \Box(\Box F \to F) \to \Box F \tag{1}$$
$$\mathbf{GL} \vdash (\Box F \to \bot) \to (\Box(\Box F \to F) \to \bot) \tag{2}$$
$$\mathbf{GL} \vdash (\Box F \to \bot) \to \Diamond(\Box F \land (F \to \bot)) \tag{3}$$

Time su opravdana prva dva konjunkta.

$$\mathbf{K} \vdash \Big((\Box F \to \bot) \land \bigwedge \Box X\Big) \to \bigwedge \Box X \tag{4}$$
$$\mathbf{K4} \vdash \bigwedge \Box X \to \Box \bigwedge(X \land \Box X) \tag{5}$$
$$\mathbf{K4} \vdash \Big((\Box F \to \bot) \land \bigwedge \Box X\Big) \to \Box \bigwedge(X \land \Box X) \tag{6}$$
$$\mathbf{GL} \vdash \Big((\Box F \to \bot) \land \bigwedge \Box X\Big) \to \Diamond(\Box F \land \neg F \land \bigwedge(X \land \Box X)) \tag{7}$$

Zatvori li se stablo, njegova je reprezentacija $\bot$.

Ispitivali smo izvodivost formule F. Pretpostavimo da se stablo zatvorilo. Imajući na umu gornji rezultat o odnosu među reprezentacijama, imamo $\mathbf{GL} \vdash (F \to \bot) \to \bot$. Drugim riječima, $\mathbf{GL} \vdash F$, što je i traženo.

Ta (jednostavnija) strana argumenta pokazuje da čak i ako pravila za stabla nisu potpuna u smislu da možda nisu sposobna pronaći sve kontradikcije koje postoje u nekoj formuli (s obzirom na **GL**), ipak barem sve one kontradikcije koje mogu pronaći doista odgovaraju kontradikcijama u **GL**, pa je test izvodivosti formule stablima u tom smislu pouzdan.

Time je argumentirano da stablo neće pogrešno ustvrditi da je formula koja nije teorem ipak teorem. No stabla za **GL** su moćnija: ako $F \to \bot$ ima otvorenu granu, F nije teorem, tj. stabla mogu mehaničkim postupkom odrediti je li formula teorem ili ne.

Definirajmo relaciju S između aktivnih grana stabala na svim razinama ugnježdenosti na način da xSy akko je x aktivna grana te je y prva aktivna grana gledano slijevo nekog (bilo kojeg) prozora na x.

Ta relacija generira skup $W = \{x | (\exists n \geq 0)(wS^n x)\}$, gdje je w prva aktivna grana slijeva u stablu (izvan svih prozora).

$R = \{(x, y) \in W^2 | (\exists n \geq 1)(xS^n y)\}$, drugim riječima R je tranzitivno zatvorenje S, uz eliminirane refleksivne veze. Naime, zapravo gradimo model za **GL** gdje će R biti relacija dostupnosti pa ne dopuštamo refleksivnost okvira.

wVp akko se p nalazi na grani w.

Pokazat ćemo da $\mathcal{M} = (W, R, V) \not\vDash F$ ako postoji otvorena grana u stablu za $F \to \bot$.

Prvo pokažimo da ako se B nalazi na $x \in W$, tada $x \vDash B$, a ako se $B \to \bot$ nalazi na $x \in W$, tada $x \not\vDash B$; po mogućnostima za oblik B i uz pretpostavku da prvo provjeravamo formule s manjim ukupnim brojem simbola, a kod onih s jednako prvo one koje spadaju pod prvi slučaj:

1. $B = \bot$, $B = p$: slijedi iz toga da je x otvorena.

2. $B = H \to G$, uz uvjet da $G \neq \bot$.[25] Ako je B na x, na x je ili $H \to \bot$ ili G. Te su formule kraće od B te je po pretpostavci tvrdnja za njih već provjerena, a po definiciji istine u svijetu modela imamo da $x \vDash H \to \bot$ (odnosno $x \nvDash H$) ili $x \vDash G$, u oba slučaja $x \vDash H \to G$.

   Ako je $B \to \bot$ na x, na x su i H i $G \to \bot$, pa $x \vDash H$ i $x \vDash G \to \bot$, dakle $x \vDash (H \to G) \to \bot$.

3. $B = \Box H$. Ako je B na x i imamo xRy, H će biti i na y. To vrijedi i za posredne S-sljedbenike y od x (i njih se mora uključiti u provjeru jer xRy) jer su modeli za **GL** tranzitivni, pa se sve "nužnosti" prenose u potomke, potomke potomaka itd. Zbog toga će direktni S-predak od y na sebi imati B, pa će y imati H. Taj direktni predak mora postojati jer $x \neq y$ zbog načina na koji je definiran R, naime nijedan svijet nikada ne vidi samog sebe, pa su x i y udaljeni barem za jednu vezu okvira, a tada je u minimalnom slučaju sam x traženi direktni predak (a B je na njemu po pretpostavci). Dakle, ako pod $F \to G$ na trenutak podrazumijevamo "F je na grani koja na sebi ima stablo s granom G", tada prenošenje nužnosti izgleda ili $B \to H$ ili $B \to B \to H$ ili $B \to B \to B \to H$ itd.

   Ako je $B \to \bot$ na x, za njega je otvoren prozor koji sadrži $H \to \bot$ i taj je prozor još uvijek otvoren (inače bi x bio zatvoren). Kako bi $x \vDash B$ tražilo da svi prozori y na x budu takvi da $y \vDash H$, a imamo otvoren (konzistentan) prozor y u kojem $y \vDash H \to \bot$, onda zbog konzistentnosti $y \nvDash H$, pa zbog definicije istine $x \nvDash B$.

$F \to \bot$ je na grani w koja odgovara svijetu w za kojeg $w \nvDash F$. Tada $\mathcal{M} \nvDash F$, a kako je okvir od $\mathcal{M}$ tranzitivan KDU (tranzitivan jer smo to simulirali prijenosom $\Box X$ u potomak, i KDU jer je konačan i irefleksivan), $\mathbf{GL} \nvDash F$.

□

5 O GL teoremstvu

5.1 Pojam zanimljivosti u formalnim sustavima

S obzirom na definiciju modalnih formula i metode stabala iz prethodnog poglavlja, lako je izgraditi skup teorema **GL**

1. Skup F inicijalno sadrži sva propozicijska slova i $\bot$. Skup $\mathcal{T}$ je inicijalno prazan.

2. Za svaku formulu ϕ u F provjerimo stablom je li ona teorem **GL** (jesu li svi putevi u stablu za $\neg\phi$ zatvoreni). Ako jest, dodajemo ϕ u $\mathcal{T}$.

3. Iz skupa F gradimo skup F' na način da u F' umetnemo sve moguće formule kojima je operator neki od **GL** operatora, a operandi iz F i stavljamo $F := F'$. Ponavljamo postupak od drugog koraka.

Nedostatak je tog postupka u tome što skup F već nakon nekoliko iteracija kombinatorno eksplodira. Drugi je nedostatak to što će mnoge formule u $\mathcal{T}$ biti međusobno ekvivalentne. Još jedan nedostatak je što će velika većina tih formula biti nezanimljivi truizmi ($p \to p$ itd.)

Slijede mehanizmi koji se koriste u ovom radu kako bi se osiguralo da su pronađeni teoremi zanimljivi, uz argumente koji uspostavljaju vezu između intuitivnog shvaćanja "zanimljivosti" i tih mehanizama:

[25] Inače prvi ili treći slučaj rješavaju takav oblik B.

1. Korištenje $\{\rightarrow, \leftrightarrow, \perp, \Box\}$ kao jedinih operatora ($\perp$ je operator bez operanada). Razlog za mali broj operatora je ublažavanje kombinatorne eksplozije. Što se propozicijskih operatora tiče, najekonomičnije bi bilo uzeti ne-ili ili ne-i operatora (Shefferov i Peirceov operator). No formule su s njima rijetko razumljive, a mi tražimo intuitivno zanimljive formule. Stoga se unaprijed ograničimo na $\{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee, \neg, \perp, \Box, \Diamond\}$. Operator $\leftrightarrow$ je uvršten jer ga je teško prepoznati kad ga se definira pomoću drugih uobičajenih operatora. Operator $\rightarrow$ je uz njega jedini binarni operator. Uz disjunkciju i konjunkciju bi bio potreban operator $\neg$. $\rightarrow$ je općenito privlačan i zbog toga što se mnogi već znani teoremi **GL** daju formulirati samo njime (i $\Box$). Disjunkcija i konjunkcija su općenito neprivlačne jer su to komutativni operatori, pa bi njihovo korištenje produljilo kasniju provjeru međusobno istovrijednih formula. Zatim, teorem koji je konjunkcija ne može biti zanimljiv. Ako je taj teorem konjunkcija s barem jednim nezanimljivim konjunktom, nije zanimljiva zbog tog nezanimljivog konjunkta. Ako je taj teorem konjunkcija dva zanimljiva konjunkta, nije zanimljiv jer su nam konjunkti sami po sebi zanimljivi i tom konjunkcijom ne dobivamo novu informaciju. Situacija u kojoj je antecedens kondicionala konjunkcija svodiva je na kondicionale ($(F \wedge G) \rightarrow H \equiv F \rightarrow (G \rightarrow H)$). Kondicional kojem je konsekvent konjunkcija prikaziv je kao konjunkcija kondicionala, a teorem koji je kojunkcija prema ranijem argumentu ne može biti zanimljiv. Situacija u kojoj je antecedens kondicionala disjunkcija se svodi na konjunkciju kondicionala. Za situaciju u kojoj je konzekvens kondicionala disjunkcija, te za situaciju u kojoj je cijeli teorem disjunkcija, nema očitog svođenja.

   Barem su dva razloga iz kojih je ipak poželjnije kao primitivan operator imati kondicional umjesto disjunkcije: kondicionalu je potrebna jedna negacija manje za definiciju konjunkcije, te među popularnim **GL** teoremima nema nijedne disjunkcije (a koja nije jednostavnije prikaziva kao kondicional). Kondicional je poželjan i jer ne traži negaciju. Naime, dovoljan je operator $\perp$, a imati $\perp$ u skupu operatora je korisno jer **GL** često govori o konzistentnosti sustava, koja je, u stvari, nedokazivost kontradikcije.

2. Dokazivanje od kraćih ka složenijim formulama. To je općenito svojstvo jedan-po-jedan načina traženja teorema.

3. **K4** teoremi nisu zanimljivi. Ovo nije sasvim točno. Primjerice, zanimljivo je da **GL** $\vdash \Box F \rightarrow \Box\Box F$. No, izbacivanje **K4** teorema je samo po sebi poželjno: među **GL** teoremima je velik broj **K4** teorema, a općenito želimo eliminirati što više formula kako bismo pronašli najzanimljivije formule. Stoga je korisno pronaći način za argumentirati i podržati tezu da **K4** nisu zanimljivi. Možemo dati sljedeći argument. Pretpostavimo da ne znamo kako je **GL** pouzdana i potpuna formalizacija logike predikata $Bew(\ulcorner F \urcorner)$, ali da znamo da je **K4** pouzdana formalizacija. Čini se da nam tada ne bi bilo osobito zanimljivo promatrati moć dokazivanja teorije o vlasitoj dokazivosti. Imali bismo aksiome koji formaliziraju "Ako je dokazivo $F \rightarrow G$ i dokazivo F, tada je dokazivo G", "Ako je F teorem, tada je teorem i to da je F dokazivo", "Ako je F dokazivo, dokazivo je da je F dokazivo". Sva su ta svojstva i više nego očekivana. Za nadati se, ako ne i očekivati, je da će formalizacija dokazivosti sadržavati i bitno jača svojstva poput $F \leftrightarrow \Box F$. Iz potonjeg bi svojstva slijedila idealna situacija da nema razlike između izvodivosti aritmetike i onoga što sama aritmetika može dokazati o vlastitoj izvodivosti. **K4** ne tvrdi takvu situaciju, ali je s njom konzistentan.

   Dokazivost je u formalnim aritmetikama "zanimljiva" upravo zbog Gödelovih otkrića, odnosno onih svojstava dokazivosti koja su u kontradikciji sa svojstvima kojima se nadamo ili koja očekujemo. Naime, kad bi $F \leftrightarrow \Box F$ bila aksiomska shema **GL**, tada bi $\Box\perp \rightarrow \perp$ bio teorem. Tada bi teorem bio i $\Box(\Box\perp \rightarrow \perp)$. No, $\Box(\Box\perp \rightarrow \perp) \rightarrow \Box\perp$ je instanca sheme L. Tada bi s dvije primjene modus ponensa i $\perp$ bio torem **GL**, što bi učinilo sustav kontradiktornim.

Međutim, ostaje činjenica da premda su svojstva vidljiva kroz **K4** teoreme očekivana, nisu očita, i u tom smislu mogu biti zanimljiva. U ovom ćemo radu na svim mjestima podrazumijevati da **K4** teoremi nisu zanimljivi, dakle koncentrirati ćemo se na teoreme koji se mogu dobiti tek uz pomoć neočekivanih svojstava dokazivosti.

4. Odabir samo jedne formule među formulama koje "govore isto". Metoda stabala za **GL** je izravno proširiva (ili preciznije, skrativa) do metode stabala za **K**. Ako su formule F i G ekvivalentne u **K**, tada je njihov smisao sličan. No, ponekad je razlika **K** ekvivalentnih formula velika. Primjerice, ove su dvije formule ekvivalentne u **K**: $\Box(\Box p \to \perp) \leftrightarrow \Box\perp$ i $\Box(\Box p \to \perp) \to \Box\Box p$.

   Zbog toga je umjesto automatiziranog odabira samo jedne zanimljive formule među više formula ekvivalentnih u K korišten niz jednostavnijih kriterija. Većina tih kriterija ima za cilj izbaciti formule s redundantnim dijelovima, poput dvostrukih negacija. Kod takvih formula uvijek postoji jednostavniji ekvivalent.

   U sljedećim su zapisima G i H proizvoljne potformule promatrane formule F. $|G|$ je broj simbola u G, analogno za H. Nisu zanimljive formule s potformulama:

   - $\perp \to G$
   - $\perp \leftrightarrow G$
   - $G \leftrightarrow \perp$
   - $G \leftrightarrow H$, ako $G = H$
   - $G \leftrightarrow H$, ako $|G| < |H|$
   - $(G \leftrightarrow H) \leftrightarrow G$
   - $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow G$
   - $(H \to G) \leftrightarrow G$
   - $G \to (H \to G)$
   - $G \to (G \to H)$
   - $G \to (H \leftrightarrow G)$
   - $G \to (G \leftrightarrow H)$
   - $(G \to \perp) \to (H \to \perp)$
   - $(G \to \perp) \leftrightarrow (H \to \perp)$
   - $(\perp \to \perp) \to G$
   - $(\perp \to \perp) \leftrightarrow G$
   - $G \to (\perp \to \perp)$
   - $G \leftrightarrow (\perp \to \perp)$
   - $G \to H$, ako $G = H$, osim $\perp \to \perp$

5. Neka je F teorem **GL**. Tada $\Box F$ nije zanimljiva formula. Ako vrijedi

$$F = I \to J, \text{ a } G = \underbrace{\Box ... \Box}_{k \text{ javljanja}} I \to \underbrace{\Box ... \Box}_{k \text{ javljanja}} J$$

   tada G nije zanimljiva formula. Ako je F izvodivo iz G, ali ne i obratno, u propozicijskoj logici, tada F nije zanimljiv.

U [Colton i Bundy 1999] su dani neki općeniti - nevezani uz **GL** pa i modalnu logiku - kriteriji zanimljivosti za formulu, osmišljeni za strojna pronalaženja teorema. Tu se dakle ne radi o izgradnji skupa $\mathcal{T}$ s početka poglavlja već se traži "zanimljiv" podskup od $\mathcal{T}$. Kriteriji iz [Colton i Bundy 1999] uz komentare koji se mehanizmi iz ovog rada odnose na njih:

- Formula treba nositi novine s obzirom na prethodno poznate formule - (1), (4), (5)
- Formula treba biti iznenađujuća - (2), (3), (4), (5)

- Formula treba biti vezana uz “netrivijalne” modele - (3)
- Formula treba biti razumljiva - (1)
- Dokaz formule bi trebao biti netrivijalan. Zbog postojanja efektivnih metoda koje (ne)izvodivost izračunavaju mehaničkim postupkom, za problem izvodivosti imamo totalnu rekurzivnu funkciju odluke, pa “trivijalnost” dokaza postaje irelevantna.
- Empirijska istinitost - riječ je o deduktivnom sustavu, no empirijsku istinitost možemo shvatiti kao stupanj adekvatnosti metode stabala za **GL**. U prethodnom je poglavlju demonstrirano kako je metoda stabala (potpuno) adekvatna za **GL**.

  Empirijsku istinitost možemo shvatiti i kao stupanj adekvatnosti metode stabala za PA (preko **GL**), npr. u scenariju u kojem koristimo **GL** kao alat za istraživanje snage aritmetika prvog reda da dokazuju o vlastitoj dokazivosti. Tada bi se empirijska istinitost sastojala u aritmetičkoj adekvatnosti. No, znamo da je **GL** i aritmetički potpuna (Solovayov teorem, čiji dokaz nije dan u ovom radu).

  Uvjet empirijske istinitosti je dakle ispunjen pukom činjenicom da se koristi (potpuno) adekvatna metoda za **GL**.[26]

5.2 Generiranje formula i rezultati

Stupanj formule je broj javljanja binarnih operatora u njoj. Stupanj skupa formula je najviši stupanj formule u tom skupu.

Modalna dubina formule je duljina najduljeg prefiksa oblika $\Box\ldots\Box$ ispred njenih potformula. Modalna dubina skupa formula je najveća modalna dubina formule u tom skupu. Primjerice, modalna dubina formule $\Box\Box(\Box\Box p \to \Box\Box\bot)$ je 2, a modalna dubina formule $p \lor \Box\Box\Box p$ je 3.

Neka je F formula, a f funkcija sa skupa svih propozicijskih slova u skup $\mathcal{L}$. **Supstitucijska instanca** formule F je bilo koja formula G dobivena iz F zamjenom svakog propozicijskog slova p s $f(p)$.

S obzirom na velik broj zanimljivih formula čak i u skupovima niskog stupnja i male modalne dubine, korisno je organizirati rezultate u mrežu (graf). Pritom jedna formula “pokazuje” drugu ako je zadovoljen neki uvjet među njima. Pogledajmo neke od mogućih kandidata za relaciju pokazivanja:

1. F pokazuje na G ako sustav **K** proširen svim supstitucijskim instancama formule F može dokazati G. Ovo je idealan kandidat za relaciju pokazivanja i zapravo bi omogućio prikaz hijerarhije svih zanimljivih sustava modalne logike koji generaliziraju **GL**.

   No, Kripkeovi okviri ne mogu uvijek pružiti zadovoljavajuću semantiku za proizvoljan sustav modalne logike. Pomalo ironično, primjer kojim se obično ilustrira postojanje nepotpunih sustava modalne logike je shema $\Box(\Box F \leftrightarrow F) \to \Box F$. Osim što strukturalno podsjeća na L, ona je teorem **GL** i prolazi ranije opisane testove zanimljivosti, te je time direktan primjer sheme zbog koje bismo se morali okrenuti ili ručnom izvođenju, ili alterantivnim semantikama. Naime, **K** proširen tom shemom jako korespondira istoj klasi okvira kojoj koresponira **GL**. Metoda stabala je prikriveni algoritam konstrukcije protuprimjera danoj formuli. Taj je protuprimjer Kripkeov model u kojem je negacija dane formule ispunjena.

[26] Uvjet empirijske istinitosti nije ispunjen ako bismo metodu stabala za **GL** koristili za sustav za koji sam **GL** nije adekvatan. Ranije je spomenuto da se **GL** u jednom radu koristio za formalizaciju morala. Pod, doduše vrlo jakom i nesigurnom, pretpostavkom da postoji ekvivalent Peanove aritmetike za “račun morala”, te pod pretpostavkom da **GL** samo dijelom hvata logiku relacije “moralno je da ...”, metoda bi stabala bila neadekvatna i posljedično uvjet empirijske istinitosti ne bi bio zadovoljen.

Međutim, ne može postojati model na tranzitivnom konverzno dobro utemeljenom okviru u kojem bi spomenuta shema bila istinita u w, a da pritom L nije istinita u w. Okvir mora biti tranzitivan KDU kako bismo osigurali da je spomenuta shema na njemu valjana, no ranije smo vidjeli da je na svakom tranzitivnom KDU okviru L valjana formula.

Općenito nije odlučiv problem slijede li iz nekog sustava modalne logike sve instance neke sheme. Istraživanje je li taj problem možda odlučiv u domeni nadskupa **GL** je znatno složenije od okvira ovog rada.

2. F pokazuje na G ako $\mathbf{K} \vdash F \to G$. Ovaj je kandidat slaba aproksimacija prethodnog kandidata. Osnovni je problem relativno mali broj veza u grafu s ovakom relacijom pokazivanja. Osnovna je prednost jednostavna implementacija, **K** stabla su jednostavnija od **GL** stabala.

3. F pokazuje na G ako $\mathbf{K4} \vdash F \to G$. Nalik prethodnom kandidatu. U grafu će biti više veza uz cijenu što je **K4** možda snažniji nego što bismo htjeli. Naime, jednakima će proglasiti formule izvodive jedne iz druge uz pomoć **K4** transformacija, što uključuje relativno snažno načelo tranzitivnosti. No, imajući na umu da smo već izbacili **K4** teoreme iz zanimljivih, ta nas cijena ne bi trebala zabrinjavati.

4. F pokazuje na G ako je G supstitucijska instanca od F. Prednost ovakve relacije je što ju možemo ujedno prirodno interpretirati kao odnos podskupa između skupa teorema PA dobivenih "instancijacijama" formule F (kako je opisano u poglavlju o kodiranju sintakse) te skupa teorema dobivenih "instancijacijama" formule G.

Razmatrat ćemo posljednja dva kandidata kao kriterije pri organizaciji teorema.

Za kraj, napomenimo da ako je F ekvivalentno G u propozicijskoj logici, tada će najviše jedno od toga dvoje biti prikazano kao zanimljiva formula. Također, napomenimo i da je skup zanimljivih formula ovisan o skupu svih promatranih formula zbog ranije navedene točke 5.

U svakom se testu na implementiranom dokazivaču generiraju sve formule stupnja S, modalne dubine M te broja varijabli V. Potom se iz njih uzimaju formule koje prolaze kriterij zanimljivosti. Zanimljive se formule razvrstavaju u klase ekvivalencije s obzirom na relaciju ekvivalencije $I(F,G) \wedge I(G,F)$, gdje je I ranije odabrana relacija pokazivanja. Prilikom korištenja mogućnosti izvođenja supstitucijom kao relacije, u pojedinoj se klasi sve formule osim odabranog reprezentanta brišu. Na kraju se provjeravaju pokazivanja među reprezentantima klasa te crta graf.

Na grafovima nisu ucrtane klase koje nisu u relaciji s elementima drugih klasa.

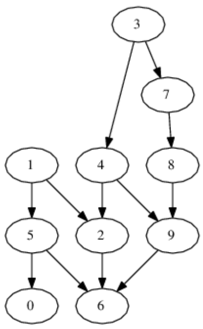
5.2.1 Test 1 ($S = 2$, $M = 2$, $V = 1$, $I = \mathbf{K4}$ *slijed*)

Pojednostavljivanje je provedeno na način da struktura pojednostavljenog oblika formule maksimalno odražava strukturu izvorne formule. Pojednostavljivanje je "guranje" negacija prema listovima sintaktičkog stabla formule te zamjena odgovarajućih izraza poput $\neg q \to p$ s prirodnijima poputa $q \vee p$.

Primijetimo da je formalizirani Gödelov drugi teorem nepotpunosti u 7. klasi. Dokazivo je da je sustav konzistentan ($\Box\Diamond\top$) ako i samo ako sustav nije konzistentan ($\Box\bot$). Nazovimo tu formulu GDL.

GDL je aksiom **GL** - pogledamo li izvorni oblik dokazane formule, vidimo da je to shema L instancirana s $\bot$ za F.

To je iznimno produktivna formula. Kao što je vidljivo iz grafa, cijela je desna strana tablice njena posljedica. Objasnimo zašto je GDL toliko produktivna formula. U ovom ćemo objašnjenju pod posljedicom misliti na **K** posljedicu jer nam nije potreban snažniji smisao **K4** posljedice. Primijetimo da iz $\Box\bot$ slijedi $\Box F$ za bilo koju formulu F. Stoga sve formule $\Box\Diamond\top \to \Box F$ odmah



Slika 1: Graf veza između klasa teorema u 1. testu.

K	Pojednostavljena formula	Izvorna formula
0	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$
	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$
	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \Box\Box p$
	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow p) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow p) \to \Box\Box p$
1	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box p) \leftrightarrow \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box p) \leftrightarrow \Box\Box p$
	$\Box(\Box\Box p \to \Box p) \leftrightarrow \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \to \Box p) \leftrightarrow \Box\Box p$
2	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$
	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box\bot) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box\bot) \to \Box\Box p$
	$\Box(\Box\Box p \to \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box p \to \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$
	$\Box(\Box\Box p \to \Box\bot) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \to \Box\bot) \to \Box\Box p$
3	$\Box(\Box\Box\bot \leftrightarrow \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box\bot \leftrightarrow \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$
	$\Box(\Box\Box\bot \to \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box\bot \to \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$
4	$\Box(\Box\Box\bot \leftrightarrow \Box\bot) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box\bot \leftrightarrow \Box\bot) \to \Box\Box p$
	$\Box(\Box\Box\bot \to \Box\bot) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box\bot \to \Box\bot) \to \Box\Box p$
5	$\Box(\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$
	$\Box(\Box\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$
	$\Box(\Box p \to p) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box p \to p) \to \Box\Box p$
	$\Box(\Box\Box p \to p) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \to p) \to \Box\Box p$
6	$\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box p \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
	$\Box\Diamond\Diamond\neg p \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box\Box p \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
	$\Box\Diamond\neg p \to \Box p$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box p$
	$\Box\Diamond\neg p \to \Box\Box p$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box\Box p$
	$\Box\Diamond\Diamond\neg p \to \Box p$	$\Box(\Box\Box p \to \bot) \to \Box p$
	$\Box\Diamond\Diamond\neg p \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \to \bot) \to \Box\Box p$
	$\Box\Diamond\neg p \to \Box\Box\bot$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box\Box\bot$
	$\Box\Diamond\Diamond\neg p \to \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box p \to \bot) \to \Box\Box\bot$
7	$\Box\Diamond\top \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
	$\Box\Diamond\Diamond\top \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box\Box\bot \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
	$\Box\Diamond\top \to \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box\Box\bot$
	$\Box\Diamond\Diamond\top \to \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box\bot \to \bot) \to \Box\Box\bot$
8	$\Box\Diamond\top \to \Box p$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box p$
	$\Box\Diamond\Diamond\top \to \Box p$	$\Box(\Box\Box\bot \to \bot) \to \Box p$
9	$\Box\Diamond\top \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box\Box p$
	$\Box\Diamond\Diamond\top \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box\bot \to \bot) \to \Box\Box p$

Tablica 1: Klase ekvivalencije formula dobivenih u 1. testu.

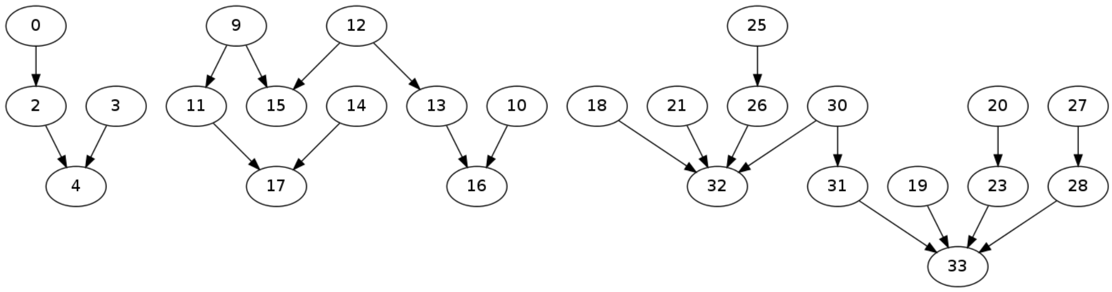
slijede iz G. Primijetimo i da iz $\Box\Diamond F$ slijedi $\Box\Diamond(F \vee \neg F)$, odakle očito slijedi $\Box\Diamond\top$. Imajući to dvoje na umu, iz GDL slijedi bilo koja formula oblika $\Box\Diamond F \to \Box G$. Sve formule iz klasa 6 do 9 imaju taj oblik.

U klasi 5 bi bila formula L instancirana s p za F da ona propozicijski već ne slijedi iz prve formule te klase. U toj je klasi formula $\Box(\Box\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$. Nju bismo mogli nazvati autentično zanimljivom jer nije supstitucijska instanca nekog drugog dobro poznatog teorema. Preostale su formule te klase jednostavne **K4** posljedice prvih dviju formula.

U klasi 0 su varijante klase 5, oslabljene dodavanjem novih uvjeta u antecedens. U klasi 1 i 3 su neke supstitucijske instance klasa 0 i 5. U klasi 4 su jednostavne **K** posljedice klase 3.

U klasi 2 formule nisu instance nekog drugog teorema iz testa, pa ih uz $\Box(\Box\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$ i GDL možemo smatrati najzanimljivijim formulama testa.

5.2.2 Test 2 ($S = 2$, $M = 2$, $V = 1$, $I = \mathit{supstitucijabilnost}$)



Slika 2: Graf veza između klasa teorema u 2. testu.

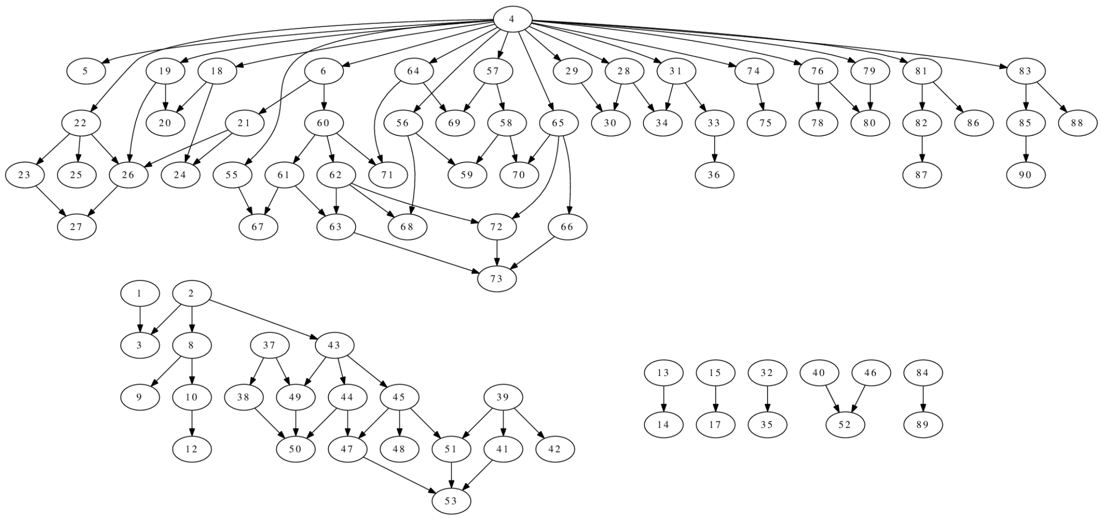
K	Pojednostavljena formula	Izvorna formula	K	Pojednostavljena formula	Izvorna formula
0	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$	17	$\Box(\Box\Box\bot \to \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box\bot \to \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$
1	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$	18	$\Box(\Box p \to p) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box p \to p) \to \Box\Box p$
2	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box p) \leftrightarrow \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box p) \leftrightarrow \Box\Box p$	19	$\Box(\Box\Box p \to p) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \to p) \to \Box\Box p$
3	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	20	$\Box\Diamond\neg p \to \Box p$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box p$
4	$\Box(\Box\Box\bot \leftrightarrow \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box\bot \leftrightarrow \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	21	$\Box\Diamond\neg p \to \Box\Box p$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box\Box p$
5	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \Box\Box p$	22	$\Box\Diamond\Diamond\neg p \to \Box p$	$\Box(\Box\Box p \to \bot) \to \Box p$
6	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow p) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow p) \to \Box\Box p$	23	$\Box\Diamond\Diamond\neg p \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \to \bot) \to \Box\Box p$
7	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box\bot) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \leftrightarrow \Box\bot) \to \Box\Box p$	24	$\Box(\Box\Box p \to \Box\bot) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \to \Box\bot) \to \Box\Box p$
8	$\Box(\Box\Box\bot \leftrightarrow \Box\bot) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box\bot \leftrightarrow \Box\bot) \to \Box\Box p$	25	$\Box\Diamond\top \to \Box p$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box p$
9	$\Box(\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$	26	$\Box\Diamond\top \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box\Box p$
10	$\Box(\Box\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$	27	$\Box\Diamond\Diamond\top \to \Box p$	$\Box(\Box\Box\bot \to \bot) \to \Box p$
11	$\Box(\Box\Box p \to \Box p) \leftrightarrow \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box p \to \Box p) \leftrightarrow \Box\Box p$	28	$\Box\Diamond\Diamond\top \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box\bot \to \bot) \to \Box\Box p$
12	$\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box p \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	29	$\Box(\Box\Box\bot \to \Box\bot) \to \Box\Box p$	$\Box(\Box\Box\bot \to \Box\bot) \to \Box\Box p$
13	$\Box\Diamond\Diamond\neg p \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box\Box p \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	30	$\Box\Diamond\neg p \to \Box\Box\bot$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box\Box\bot$
14	$\Box(\Box\Box p \to \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box p \to \Box\bot) \leftrightarrow \Box\Box\bot$	31	$\Box\Diamond\Diamond\neg p \to \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box p \to \bot) \to \Box\Box\bot$
15	$\Box\Diamond\top \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	32	$\Box\Diamond\top \to \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box\Box\bot$
16	$\Box\Diamond\Diamond\top \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box\Box\bot \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	33	$\Box\Diamond\Diamond\top \to \Box\Box\bot$	$\Box(\Box\Box\bot \to \bot) \to \Box\Box\bot$

Tablica 2: Klase ekvivalencije formula dobivenih u 2. testu.

U ovom su testu parametri jednaki kao u prvom testu osim što je korištena drugačija relacija pokazivanja.

Klase ekvivalencije su jednočlane jer je za svaku formulu s do jednim propozicijskim slovom moguća samo jedna supstitucijska instanca. Formule koje nemaju supstitucijskih instanci u skupu i nisu supstitucijska instanca nijedne druge formule iz skupa su: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 15, 16, 17, 22, 24, 29, 32 i 33.

5.2.3 Test 3 ($S = 3$, $M = 1$, $V = 2$, $I = supstitucijabilnost$)



Slika 3: Graf veza između klasa teorema u 3. testu.

K	Pojednostavljena formula	Izvorna formula	K	Pojednostavljena formula	Izvorna formula
0	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$	46	$\Box(\Box p \wedge \Diamond\neg q) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box((\Box p \to \Box q) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
1	$\Box(\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$	47	$\Box\Diamond(\Box p \wedge \Diamond\neg q) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(\Box p \to \Box q) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
2	$\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box p \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	48	$\Box\Diamond(p \wedge \Diamond\neg p) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(p \to \Box p) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
3	$\Box\Diamond\top \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	49	$\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(p \to \bot) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
4	$\Box\Diamond\neg p \to \Box q$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box q$	50	$\Box\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(\Box p \to \bot) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
5	$\Box\Diamond\neg p \to \Box p$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box p$	51	$\Box\Diamond(p \wedge \Diamond\top) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(p \to \Box\bot) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
6	$\Box\Diamond\top \to \Box p$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box p$	52	$\Box(\Box p \wedge \Diamond\top) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box((\Box p \to \Box\bot) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
7	$\Box(\Box(\Box p \leftrightarrow p) \to p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box(\Box p \leftrightarrow p) \to p) \leftrightarrow \Box p$	53	$\Box\Diamond(\Box p \wedge \Diamond\top) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(\Box p \to \Box\bot) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$
8	$\Box\Diamond(\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(\Box p \leftrightarrow q) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	54	$\Box(\Box p \to p) \to \Box(p \to \Box p)$	$\Box(\Box p \to p) \to \Box(p \to \Box p)$
9	$\Box\Diamond(\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg p) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	55	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(\Box q \to q)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(\Box q \to q)$
10	$\Box\Diamond(\Diamond\top \leftrightarrow \neg p) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(\Box\bot \leftrightarrow p) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	56	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(q \to \Box q)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(q \to \Box q)$
11	$\Box(\Diamond\top \leftrightarrow \Diamond\neg p) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box((\Box\bot \leftrightarrow \Box p) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	57	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(p \to q)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(p \to q)$
12	$\Box\Diamond(\Diamond\top \leftrightarrow \Diamond\neg p) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(\Box\bot \leftrightarrow \Box p) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	58	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(p \to \Box q)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(p \to \Box q)$
13	$\Box(\Box(p \to q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box(\Box(p \to q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	59	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(p \to \Box p)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(p \to \Box p)$
14	$\Box(\Box(\Box p \to q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \to q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	60	$\Box\Diamond\top \to \Box(p \to q)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(p \to q)$
15	$\Box(\Box(p \to \Box q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box(\Box(p \to \Box q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	61	$\Box\Diamond\top \to \Box(\Box p \to q)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(\Box p \to q)$
16	$\Box((\Box p \to \Box q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box((\Box p \to \Box q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	62	$\Box\Diamond\top \to \Box(p \to \Box q)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(p \to \Box q)$
17	$\Box(\Box(\Box p \to \Box q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \to \Box q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow \Box q$	63	$\Box\Diamond\top \to \Box(\Box p \to \Box q)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(\Box p \to \Box q)$
18	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(\Box q \leftrightarrow q)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(\Box q \leftrightarrow q)$	64	$\Box\Diamond\neg p \to \Box\neg q$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(q \to \bot)$
19	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(\Box p \leftrightarrow q)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(\Box p \leftrightarrow q)$	65	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(q \to \Box\bot)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(q \to \Box\bot)$
20	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(\Box p \leftrightarrow p)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(\Box p \leftrightarrow p)$	66	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(\Box q \to \Box\bot)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(\Box q \to \Box\bot)$
21	$\Box\Diamond\top \to \Box(\Box p \leftrightarrow q)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(\Box p \leftrightarrow q)$	67	$\Box\Diamond\top \to \Box(\Box p \to p)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(\Box p \to p)$
22	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow q)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow q)$	68	$\Box\Diamond\top \to \Box(p \to \Box p)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(p \to \Box p)$
23	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow \Box q)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow \Box q)$	69	$\Box\Diamond\neg p \to \Box\neg p$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(p \to \bot)$
24	$\Box\Diamond\top \to \Box(\Box p \leftrightarrow p)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(\Box p \leftrightarrow p)$	70	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(p \to \Box\bot)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(p \to \Box\bot)$
25	$\Box\Diamond\neg p \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow p)$	$\Box(\Box p \to \bot) \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow p)$	71	$\Box\Diamond\top \to \Box\neg p$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(p \to \bot)$
26	$\Box\Diamond\top \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow p)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow p)$	72	$\Box\Diamond\top \to \Box(p \to \Box\bot)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(p \to \Box\bot)$
27	$\Box\Diamond\top \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow \Box p)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(\Box\bot \leftrightarrow \Box p)$	73	$\Box\Diamond\top \to \Box(\Box p \to \Box\bot)$	$\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box(\Box p \to \Box\bot)$
28	$\Box\Diamond(\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg q) \to \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \leftrightarrow q) \to \bot) \to \Box q$	74	$\Box\Diamond(p \wedge \neg q) \to \Box q$	$\Box(\Box(p \to q) \to \bot) \to \Box q$
29	$\Box\Diamond(\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg p) \to \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \bot) \to \Box q$	75	$\Box\Diamond(\Box p \wedge \neg q) \to \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \to q) \to \bot) \to \Box q$
30	$\Box\Diamond(\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg p) \to \Box p$	$\Box(\Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \bot) \to \Box p$	76	$\Box\Diamond(p \wedge \Diamond\neg q) \to \Box q$	$\Box(\Box(p \to \Box q) \to \bot) \to \Box q$
31	$\Box\Diamond(\Diamond\top \leftrightarrow \neg p) \to \Box q$	$\Box(\Box(\Box\bot \leftrightarrow p) \to \bot) \to \Box q$	77	$\Box(\Box p \wedge \Diamond\neg q) \to \Box q$	$\Box((\Box p \to \Box q) \to \bot) \to \Box q$
32	$\Box(\Diamond\top \leftrightarrow \Diamond\neg p) \to \Box q$	$\Box((\Box\bot \leftrightarrow \Box p) \to \bot) \to \Box q$	78	$\Box\Diamond(\Box p \wedge \Diamond\neg q) \to \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \to \Box q) \to \bot) \to \Box q$
33	$\Box\Diamond(\Diamond\top \leftrightarrow \Diamond\neg p) \to \Box q$	$\Box(\Box(\Box\bot \leftrightarrow \Box p) \to \bot) \to \Box q$	79	$\Box\Diamond(p \wedge \Diamond\neg p) \to \Box q$	$\Box(\Box(p \to \Box p) \to \bot) \to \Box q$
34	$\Box\Diamond(\Diamond\top \leftrightarrow \neg p) \to \Box p$	$\Box(\Box(\Box\bot \leftrightarrow p) \to \bot) \to \Box p$	80	$\Box\Diamond(p \wedge \Diamond\neg p) \to \Box p$	$\Box(\Box(p \to \Box p) \to \bot) \to \Box p$
35	$\Box(\Diamond\top \leftrightarrow \Diamond\neg p) \to \Box p$	$\Box((\Box\bot \leftrightarrow \Box p) \to \bot) \to \Box p$	81	$\Box\Diamond p \to \Box q$	$\Box(\Box(p \to \bot) \to \bot) \to \Box q$
36	$\Box\Diamond(\Diamond\top \leftrightarrow \Diamond\neg p) \to \Box p$	$\Box(\Box(\Box\bot \leftrightarrow \Box p) \to \bot) \to \Box p$	82	$\Box\Diamond\Box p \to \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \to \bot) \to \bot) \to \Box q$
37	$\Box(\Box(p \to q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box(\Box(p \to q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	83	$\Box\Diamond(p \wedge \Diamond\top) \to \Box q$	$\Box(\Box(p \to \Box\bot) \to \bot) \to \Box q$
38	$\Box(\Box(\Box p \to q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \to q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	84	$\Box(\Box p \wedge \Diamond\top) \to \Box q$	$\Box((\Box p \to \Box\bot) \to \bot) \to \Box q$
39	$\Box(\Box(p \to \Box q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box(\Box(p \to \Box q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	85	$\Box\Diamond(\Box p \wedge \Diamond\top) \to \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \to \Box\bot) \to \bot) \to \Box q$
40	$\Box((\Box p \to \Box q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box((\Box p \to \Box q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	86	$\Box\Diamond p \to \Box p$	$\Box(\Box(p \to \bot) \to \bot) \to \Box p$
41	$\Box(\Box(\Box p \to \Box q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	$\Box(\Box(\Box p \to \Box q) \to q) \leftrightarrow \Box q$	87	$\Box\Diamond\Box p \to \Box p$	$\Box(\Box(\Box p \to \bot) \to \bot) \to \Box p$
42	$\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \leftrightarrow \Box p$	$\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \leftrightarrow \Box p$	88	$\Box\Diamond(p \wedge \Diamond\top) \to \Box p$	$\Box(\Box(p \to \Box\bot) \to \bot) \to \Box p$
43	$\Box\Diamond(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(p \to q) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	89	$\Box(\Box p \wedge \Diamond\top) \to \Box p$	$\Box((\Box p \to \Box\bot) \to \bot) \to \Box p$
44	$\Box\Diamond(\Box p \wedge \neg q) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(\Box p \to q) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$	90	$\Box\Diamond(\Box p \wedge \Diamond\top) \to \Box p$	$\Box(\Box(\Box p \to \Box\bot) \to \bot) \to \Box p$
45	$\Box\Diamond(p \wedge \Diamond\neg q) \leftrightarrow \Box\bot$	$\Box(\Box(p \to \Box q) \to \bot) \leftrightarrow \Box\bot$			

Tablica 3: Klase ekvivalencije formula dobivenih u 3. testu.

6 Zaključak

Gödel-Löb sustav (**GL**) je sustav normalne modalne logike dobiven proširenjem sustava **K** instancama formaliziranog Löbovog teorema $\Box(\Box F \to F) \to \Box F$.

U ovom radu je prvo skicirana veza **GL** te unutarteorijskog predikata "dokazivo" Peanove aritmetike prvog reda.

S obzirom na nedostatak prostora i činjenicu da je ta veza za ovaj konkretan rad ipak irelevantna, nisu dani dokazi Löbovog teorema ($PA \vdash Bew(\ulcorner F \urcorner) \Rightarrow PA \vdash F$) te Solovayovog teorema aritmetičke potpunosti **GL** za PA.

Potom su dokazana osnovna svojstva **GL** kao sustava normalne modalne logike. Konkretno, to su jaka karakterizacija s obzirom na klasu tranzitivnih konverzno dobro utemeljenih okvira, semantička pouzdanost i potpunost te odlučivost.

U drugom dijelu rada (posljednje poglavlje) opisano je kako se svojstvo odlučivosti može iskoristiti za izgradnju automatiziranog dokazivača teorema.

Dana je rasprava o načinu pronalaženja intuitivno zanimljivih teorema, kako bi se ublažila kombinatorna eksplozija zbog velikog broja trivijalnih teorema. Takav dokazivač je implementiran (v. `https://github.com/luka-mikec/godellob-prover` za izvorni kôd).

Dana je i rasprava o načinu vizualizacije rezultata te demostracija rada dokazivača s nekoliko manjih testnih pokretanja.

Prostor za napredak je prvenstveno izrađivanje bolje heuristike prepoznavanja "zanimljivih" formula, u okviru čega bi glavni cilj bilo istraživanje mogućnosti automatizirane izrade same metode stabala za sustave koji su proširenja **GL**.

Postoji i prostor za generalizaciju na druge sustave (normalne) modalne logike. Velik broj modalnih logika je odlučivo, neke i gotovo identičnim metodama semantičkih stabala.

Literatura

[Blackburn et al. 2002] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, Yde Venema, *Modal Logic*. University of Cambridge, Cambridge, 2002.

[Boolos 1993] George Boolos, *Logic of Provability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Colton i Bundy 1999] Simon Colton i Alan Bundy, *On The Notion Of Interestingness In Automated Mathematical Discovery*. U: International Journal of Human-Computer Studies, vol. 53, br. 3, pp 351-375. 1999.

[Čačić 2011] Vedran Čačić *Normalne forme i svojstvo konačnih modela za logiku interpretabilnosti*. Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odsjek, Zagreb, 2011.

[Hofstadter 1979] Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. Basic Books, New York. 1979.

[Nagel 2001] Ernest Nagel, James Roy Newman, *Gödelov dokaz*. KruZak, Zagreb, 2001.

[Smith 2011] Peter Smith, *Gödel without tears*. University of Cambridge, Cambridge, 2011. Dostupno na: http://www.logicmatters.net/resources/pdfs/gwt/GWT.pdf (provjereno 15. 9. 2013.)

[Smith 2013] Peter Smith, *An Introduction to Gödel's Theorems*. University of Cambridge, Cambridge, 2013.

[Žarnić 2008] Berislav Žarnić, *Osnove modeliranja u modalnoj logici*. 2002. Dostupno na `http://marul.ffst.hr/~logika/nastava/doku.php?id=20102011:logika_normativnost:kd` (provjereno 15. 9. 2013.)