Definicija 1. *Neka je zadan topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$. *Točka* $t \in X$ *je gomilište skupa* $S \subseteq X$ *ako svaki otvoreni skup koji ju sadrži, sadrži i neku točku* $t' \neq t, \in S$. *Za* $S \subseteq X$, *s* dS *označavamo derivat (negdje* derivative, *negdje* derived set*) skupa* S. *Definiramo ga kao skup svih gomilišta skupa* S. X *je raspršen (scattered) ako nema nepraznih gustih-u-sebi podskupova, odnosno ako i samo ako*

$$\left(\forall S \overset{\supset \emptyset}{\subseteq X}\right)(\exists O \in \mathcal{T})(\exists t \in S)(S \cap O = \{t\}).$$

Definicija 2. *(Topološki) ordinalni prostor ili prostor ordinala je par* $(\alpha, \mathcal{T})$ *gdje je* α *ordinal, a* $\mathcal{T}$ *uređajna topologija nad* α.

Teorem 3. *Ordinalni prostor* $(\alpha, \mathcal{T})$ *je raspršen.*

Definicija 4. *(Topološki) model* $\mathcal{M}$ *je par* $((X, \mathcal{T}), V)$ *gdje je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor, a* $V \subseteq X \times prop$.

Definicija 5. *Neka je dan* $\mathcal{M}$ *i* $w \in X$. *Tada rekurzivno definiramo:*

- *Ako* $F = \bot$, *tada* $w \not\vDash F$
- *Ako* $F = p$, *tada* $w \vDash F$ *ako i samo ako* wVp
- *Ako* $F = (G \to H)$, *tada* $w \vDash F$ *ako i samo ako vrijedi:* $w \not\vDash G$ *ili* $w \vDash H$
- *Ako* $F = \Diamond G$, *tada* $w \vDash F$ *ako i samo ako* $\left(\forall O \overset{\ni w}{\in \mathcal{T}}\right)(\exists y \in O \setminus \{w\})(y \vDash G)$

Napomena 6. *Slično kao u relacijskoj semantici, ako neka formula vrijedi za sve modele nad nekim topološkim prostorom, reći ćemo da vrijedi i u samom topološkom prostoru. Ako neka formula vrijedi u svim prostorima, reći ćemo da je valjana.*

Definicija 7. *Sustav* **wK4** *je najmanji skup formula sa sljedećim svojstvima:*

- *Sadrži sve tautologije propozicijske logike,*
- *Za formule* F, G *vrijedi* $\Box(F \to G) \to (\Box F \to \Box G) \in \mathbf{wK4}$. *(shema aksioma K)*
- *Za formulu* F *vrijedi* $F \to (\Box F \to \Box\Box F) \in \mathbf{wK4}$. *(shema aksioma w4)*
- *Za formule* $F, (F \to G) \in \mathbf{wK4}$, *vrijedi* $G \in \mathbf{wK4}$. *(zatvorenje modus ponensom)*
- *Za formulu* $F \in \mathbf{wK4}$, *vrijedi* $\Box F \in \mathbf{wK4}$. *(zatvorenje nužnošću)*

Definicija 8. *Relacija* R *je* slabo tranzitivna *akko vrijedi*

$$\forall x \forall y \forall z (xRy \to (yRz \to (xRz \lor x = z))).$$

Teorem 9. *Topološka semantika je adekvatna za* **wK4**, *tj. ako je* $(X, \mathcal{T})$ *neki topološki prostor i* F *neki teorem sustava* **wK4**, *tada vrijedi* $(X, \mathcal{T}) \models F$.

Teorem 10. *Ako je* $(X, \mathcal{T})$ *neki raspršen topološki prostor i* F *neki teorem sustava* **GL**, *tada vrijedi* $(X, \mathcal{T}) \models F$.

Teorem 11. **GL** *je potpun u odnosu na klasu konačnih stabala.*

Lema 12. *(Ograničeni morfizam čuva istinu)*

Definicija 13. K_n *je okvir* (W, R) *gdje vrijedi sljedeće:*

- W *je skup svih konačnih nizova koji su:*
  - *ili prazni (samo je jedan takav,* $\langle\rangle$*),*
  - *ili su oblika* $\langle (i_0, j_0), \ldots, (i_k, j_k) \rangle$ *gdje je* $k \geq 0$, *za prve članove parova vrijedi:* $n > i_0 > \cdots > i_k >= 0$, *a drugi članovi su proizvoljni.*

  Neki elementi iz W *u* K_{128}: $\langle (127, 1931) \rangle$, $\langle (127, 28), (63, 4), (1, 1906) \rangle$ *i* $\langle (127, 0), \ldots, (0, 127) \rangle$. *Također i* $\langle (3, 19) \rangle$ *i* $\langle\rangle$.

- R *je relacija za koju vrijedi sljedeće:* $wRv \Leftrightarrow$ *Postoji* ***neprazan*** *konačan niz* ε *takav da* $v = w * \varepsilon$, *gdje je* $*$ *operacija konkatenacije. Iz definicije slijedi da je* R *tranzitivno zatvorena.*

Teorem 14. **GL** *je potpun u odnosu na klasu okvira* $\mathcal{K} = \{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definicija 15. *Filter* F *nad skupom* X *je neprazna familija podskupova od* X *za koju vrijedi:*

- *Za* $S, P \in F$ *vrijedi* $S \cap P \in F$. *(zatvorenost na konačne presjeke)*
- *Za* $S \in F$ *i* $P \supset S$ *vrijedi* $P \cap X \in F$. *(zatvorenost na nadskupe)*

Definicija 16. *Filter završetaka* $\mathcal{E}$ *(eng. end-segment filter) parcijalno uređenog skupa* X *je (najmanji) filter koji za svaki* $x \in X$ *sadrži* $\{M \in X \mid M > x\}$. *Odnosno koji je proširenje skupa*

$$B = \big\{ \{M \in X \mid M > x\} \mid x \in X \big\}.$$

Ako je $\mathcal{E}$ *filter završetaka nad* X, *označavamo* $\mathcal{E}_X = \mathcal{E}$.

Definicija 17. *Skup* S *je pozitivan za filter* F *ako nije disjunktan niti s jednim elementom iz* F.

Propozicija 18. *Za* F *postoji pozitivan skup ako i samo ako je* F *pravi filter.*

Definicija 19. *Klasa (skup)* K *je* kofinalna za ordinal α *ako* ***strogo*** *između svakog ordinala manjeg od* α *i samog* α *postoji barem jedan ordinal iz* K.

Lema 20. *$\mathcal{E}_\alpha$ je pravi filter ako i samo ako je α granični ordinal.*

Definicija 21. *Filterski model (ako je jednoznačno, samo model) je uređeni par $\mathcal{M} = (\xi, V)$, gdje je:*

- *ξ ordinal veći od 0. Definiramo $\mathcal{F}$, familiju filtera indeksiranih elementima manjim od ξ.*

  Pritom je $F_\alpha \in \mathcal{F}$ upravo $\mathcal{E}_\alpha$, tj. filter završetaka za ordinal kojim je sam filter indeksiran. Stoga ćemo i pisati $\mathcal{E}_\alpha$ umjesto F_α.

- *V je relacija valuacije između ordinala manjih od ξ i skupa propozicijskih slova. Ako $\alpha V p$ pisat ćemo i $\alpha \vDash p$.*

  Valuaciju rekurzivno širimo na skup svih formula:

  - *Ako $F = \bot$, tada $\alpha \nvDash F$.*
  - *Ako $F = (G \to H)$, tada $\alpha \vDash F$ ako i samo ako vrijedi: $\alpha \nvDash G$ ili $\alpha \vDash H$.*
  - *Ako $F = \Diamond G$, tada $\alpha \vDash F$ ako i samo ako $(\forall S \in \mathcal{E}_\alpha)(\exists \gamma \in S)(\gamma \vDash G)$.*

Klasično, pišemo $\mathcal{M} \vDash F$ kad u svim ordinalima $\alpha \in \xi$ vrijedi $\alpha \vDash F$.

Teorem 22. *Filterska semantika je adekvatna za* **GL**, *tj. ako je (ξ, V) neki filterski model i F neki teorem sustava* **GL**, *tada vrijedi $(\xi, V) \models F$.*

Korolar 23. *$\Diamond\Diamond F \to \Diamond F$ je valjana shema formula u filterskoj semantici.*

Teorem 24. *Neka je ξ ordinal veći ili jednak ω^ω.*

Neka je zadan niz funkcija $\Gamma_n : K_n \to \mathcal{P}(\xi)$. Preciznije, za svako beskonačno stablo $K_n = (W, R)$, funkcija pridružuje svakom čvoru iz W neki podskup iz ξ.

Neka za niz $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vrijedi i sljedeće, za svaki $i \in \mathbb{N}$:

1. *$\Gamma_i(\langle\rangle) \neq \emptyset$,*
2. *$x \neq y$ povlači da su $\Gamma_i(x)$ i $\Gamma_i(y)$ disjunktni,*
3. *ako yRx te nema drugih čvorova između y i x, te $\alpha \in \Gamma_i(y)$, tada je skup $\Gamma_i(x)$ pozitivan za $\mathcal{E}_\alpha$.*
4. *za svaki ordinal $\alpha \in \Gamma_i(y)$ vrijedi da se unija skupova ordinala $\Gamma_i(x)$ svih čvorova nasljednika x od y (yRx) nalazi u filteru završetaka y. Pritom dopuštamo da nasljednici sadrže i ordinale koje $\mathcal{E}_\alpha$ ne sadrži. Stoga je "nalazi u $\mathcal{E}_\alpha$" zapravo "čini nadskup nekog završetka iz $\mathcal{E}_\alpha$". U tom se smislu skup prirodnih brojeva "nalazi u" familiji $\{\{0.5, \triangle\}, \{19, 3\}\}$, jer čini nadskup drugog skupa.*

   Za neki $\beta < \alpha$, unutar Γ_i skupova nasljednika će postojati svi ordinali između β i α.

Tada iz $\xi \vDash F$ slijedi **GL** $\vdash F$.

Teorem 25. *Postoji niz funkcija $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sa svojstvima (1)-(4) iz teorema 24.*

Korolar 26. **GL** *je potpun u odnosu na filtersku interpretaciju, tj. ako u svakom filterskom modelu (ξ, V) vrijedi $(\xi, V) \vDash F$, tada je F teorem sustava* **GL**.

Teorem 27 (Potpunost)**.** **GL** *je potpun u odnosu na topološki prostor $(\omega^\omega, \mathcal{T})$, tj. ako za svaki model oblika $((\omega^\omega, \mathcal{T}), V)$ gdje je $\mathcal{T}$ uređajna topologija na ω^ω vrijedi $((\omega^\omega, \mathcal{T}), V) \vDash F$, tada je F teorem sustava* **GL**.

Korolar 28. **GL** $\vdash F$ *ako i samo je F valjana u $(\omega^\omega, \mathcal{T})$.*

Korolar 29 (Esakijin izvorni rezultat)**.**

$$\mathbf{GL} \vdash F \iff \{(X, \mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \textit{ je raspršena}\} \models F$$

Definicija 30. *Formula F je lokalno relacijski ispunjiva ako postoji točka $w \in W$ nekog nekog relacijskog modela (W, R) za koju vrijedi $w \vDash F$.*

Formula F je globalno relacijski ispunjiva ako postoji relacijski model $\mathcal{M}$ za koji $\mathcal{M} \vDash F$.

Propozicija 31. *Neka je α ordinal u topološkom modelu $(\omega^\omega, \mathcal{T})$, te neka $\alpha \vDash \Diamond^n F$ za neki $n > 0$. Tada:*

1. *$\alpha \geq \omega^n$ i*
2. *ako pritom i $\alpha < \omega^{n+1}$, onda $\alpha = \omega^n \cdot c$ za neki $c \in \mathbb{N}$.*

Definicija 32. *Formula F je ω^ω lokalno topološki ispunjiva ako postoji točka $\alpha \in \omega^\omega$ nekog topološkog modela (ω^ω, R) za koju vrijedi $\alpha \vDash F$.*

Teorem 33 (ω^ω lokalna topološka nekompaktnost)**.** *Postoji skup formula Γ čiji je svaki konačni podskup ispunjiv u ordinalu nekog topološkog modela, ali cijeli skup Γ nije ispunjiv niti u jednom ordinalu nijednog ω^ω topološkog modela.*

Definicija 34. *Ako u svakoj točki $x \in X$ svakog topološkog modela iz neke klase modela (ovisno o kontekstu, svih modela, raspršenih modela ili samo ω^ω) u kojoj je istinita svaka formula iz Γ vrijedi i F, pišemo $\Gamma \vDash F$.*

Definicija 35 (Jaka potpunost)**.** *Sustav modalne logike L je jako potpun u odnosu na određenu semantiku S ako za svaki skup (modalnih) formula Γ vrijedi da $\Gamma \vDash_S F$ povlači $\Gamma \vdash_L F$.*

Korolar 36 (Nedostatak jake potpunosti)**.** **GL** *nije jako potpun u odnosu na ω^ω topološku interpretaciju.*