Topološka potpunost polimodalne logike dokazivosti

Luka Mikec

21. studenoga 2016.

SUSTAV **GLP**

- Sustav **GLP** je sustav (poli)modalne logike.
- Modalna logika "jakog niza predikata dokazivosti."
- Svi adekvatni relacijski okviri su trivijalni.

Sustav **GLP** sadrži (za sve formule F i G, te $n, m \in \omega$):

1. tautologije propozicijske logike;
2. $[n](F \to G) \to ([n]F \to [n]G)$; (*shema aksioma K*)
3. $[n]([n]F \to F) \to [n]F$; (***shema aksioma L***)
4. $[m]F \to [n]F$ za $n > m$; (***shema aksioma P1***)
5. $\langle m \rangle F \to [n]\langle m \rangle F$ za $n > m$; (***shema aksioma P2***)
6. ako $F,\ F \to G \in$ **GLP**, onda $G \in$ **GLP**; (*zatvorenje p. i. MP*)
7. ako $F \in$ **GLP**, onda $[n]F \in$ **GLP**. (*zatvorenje p. i. gen.*)

- Probušena okolina točke t je (možda prazan) skup O takav da je skup $O \cup \{t\}$ otvoren, i skup O ne sadrži točku t.
- Za prostor $(X, \mathcal{T})$ definiramo: $\widetilde{\mathrm{d}}A = X \setminus \mathrm{d}(X \setminus A)$.
  - Točka t je u skupu $\widetilde{\mathrm{d}}A$ ako i samo ako je neka njena probušena okolina sadržana u skupu A.

Definicija istinitosti

- Neka je dan topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ i relacija forsiranja između točaka prostora i skupa propozicijskih varijabli.
- Označimo:
$$[F] = \{x \in X \mid x \Vdash F\}.$$
Uobičajeno u relacijskoj i topološkoj semantici:
$$[\neg F] = [F]^c;$$
$$[F \wedge G] = [F] \cap [G].$$
- Neke mogućnosti:
  1. $[\Diamond F] = \mathrm{cl}[F]$ $\quad [\Box F] = \mathrm{int}[F]$ (**S4** i proširenja)
  2. $[\Diamond F] = \mathrm{d}[F]$ $\quad [\Box F] = \widetilde{\mathrm{d}}[F]$ (**wK4** i proširenja).

- Neka je dan politopološki prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$.
- Topološki model nad prostorom X je par prostora X i relacije forsiranja V između točaka prostora i propozicijskih varijabli.
- Formula $[n]F$ je istinita u točki w modela $\mathcal{M}$ ako postoji probušena $\mathcal{T}_n$-okolina točke w u čijim je svim točkama istinita formula F.
- Formula $\langle n\rangle F$ je istinita u točki w modela $\mathcal{M}$ ako u svim probušenim $\mathcal{T}_n$-okolinama točke w postoji točka u kojoj je istinita formula F.
- Tada vrijedi $[\langle n\rangle F] = \mathrm{d}_n[F]$ i $[[n]F] = \widetilde{\mathrm{d}}_n[F]$.

- Lema o zamjeni.
- Preslikavanje $f : X \to Y$ je d-preslikavanje ako je otvoreno, neprekidno i diskretno po točkama.
- Diskretnost po točkama: za $y \in Y$, skup $f^{-1}(\{y\})$ generira diskretan potprostor.
- Prošli put: d-preslikavanje čuva (Cantor-Bendixsonov) rang.
- Surjektivno d-preslikavanje čuva valjanost.

Adekvatnost i karakteristična klasa

- Prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ je **GLP**-prostor ako za sve $n \in \omega$ vrijedi:
  - prostor $(X, \mathcal{T}_n)$ je raspršen;
  - vrijedi $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_{n+1}$;
  - za svaki podskup S prostora X, skup $\mathrm{d}_n S$ je $\mathcal{T}_{n+1}$-otvoren.
- Ako je prostor X jedan **GLP**-prostor, onda je formula F valjana na prostoru X (**adekvatnost**).
- Ako je formula F valjana na prostoru X, onda je prostor X jedan **GLP**-prostor (**karakteristična klasa**).

DOKAZ POTPUNOSTI

- Sustav **GLP** nema relacijsku semantiku.
- Ali njegov podsustav **J** ima.
  - Potpun je u odnosu na klasu "nasljednih stabala" (jedna klasa višeslojnih grafova).
- Postoji (jednostavno) preslikavanje M^+ između formula tako da vrijedi sljedeće:

  $$\mathbf{GLP} \vdash F \text{ ako i samo ako } \mathbf{J} \vdash M^+(F) \to F.$$

  (preslikavanje M^+ "simulira" sustav **GLP**, odnosno sheme aksioma koje nedostaju u sustavu **J**)
- Neka vrijedi $\mathbf{GLP} \nvdash F$. Tada vrijedi $\mathbf{J} \nvdash M^+(F)$. Stoga postoji **J**-model $\mathcal{M}_{\mathbf{J}}$ u čijem korijenu nije istinita formula $M^+(F)$.
- Cilj: konstruirati topološki model $\mathcal{M}_{\mathbf{GLP}}$ koristeći relacijski model $\mathcal{M}_{\mathbf{J}}$, koji čuva istinitost u korijenu.

"GLAVNA LEMA"

- Neka je F formula koja nije istinita u točki w nekog **J**-okvira $\mathcal{F}$. Tada postoji lme-prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$, gdje je X ordinal strogo manji od ϵ_0, na kojem F nije valjana formula.
- Konstrukcija (politopološkog) prostora:
  - **J**-morfizam je preslikavanje iz politopološkog prostora u **J**-okvir. Nalik d-preslikavanju ako relacijski okvir (X, R_n) shvatimo kao prostor $(X, \mathcal{T}_n)$ gdje je topologija $\mathcal{T}_n$ generirana familijom
  $$\mathcal{B}_n = \{\{x\} \cup R[x] \mid x \in X\}.$$
  - **J**-morfizam čuva valjanost (s obzirom na preslikavanje $F \mapsto M^+(F) \to F$).
  - Težak dio leme: za svaki relacijski okvir $\mathcal{F}$ pronaći prostor X takav da postoji **J**-morfizam $f : \mathcal{F} \to X$.

- Koristeći glavnu lemu i ranije razmatranje imamo:

  Neka vrijedi $\mathbf{GLP} \nvdash F$. Tada vrijedi $\mathbf{J} \nvdash M^+(F)$. Stoga postoji $\mathbf{J}$-model $\mathcal{M}_{\mathbf{J}}$ u čijem korijenu nije istinita formula $M^+(F)$. Tada (*glavna lema*) postoji lme-prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$, gdje je X ordinal strogo manji od ϵ_0, na kojem F nije valjana formula.

- Dakle, vrijedi potpunost u odnosu na klasu lme-prostora (štoviše, lme-prostora baziranih na uređajnoj topologiji gdje je skup točaka ordinal manji od ϵ_0).

LME-PROSTORI

- Prošli put: lme-prostori su rješenje problema naglog rasta kardinalnosti netrivijalnih **GLP**-prostora (generaliziranih Esakia prostora).
- Prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ nazivamo lme-prostorom utemeljenim na topologiji $\mathcal{T}$ ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:
  - topologija $\mathcal{T}_0$ je ℓ-maksimalno ℓ-proširenje topologije $\mathcal{T}$;
  - topologija $\mathcal{T}_{n+1}$ je ℓ-maksimalno ℓ-proširenje topologije $\mathcal{T}_n^+$, za svaki $n \in \omega$.
- Za lme-prostore bazirane na uređajnoj topologiji vrijedi:

$$\rho_{n+1} = u^{n+1},$$

  gdje je u rang uređajne topologije.
- Disjunktna unija lme-prostora je lme-prostor.

POTPUNOST U ODNOSU NA PROSTOR

- Postoji lme-prostor čiji je skup točaka ordinal ϵ_0 na kojem su valjani samo teoremi sustava **GLP**.
  - "Nadovezivanjem" prostora iz prethodnog rezultata, homeomorfan i njihovoj disjunktnoj uniji. Disjunktna unija lme-prostora čuva svojstvo lme-prostora, pa je dobiveni prostor lme-prostor.