Topološka potpunost polimodalne logike dokazivosti

Luka Mikec

14. studenoga 2016.

SUSTAV **GLP**

- Sustav **GLP** je sustav (poli)modalne logike.
- Uveo ga je Giorgi Japaridze 1988.
- Modalna logika "jakog niza predikata dokazivosti."
- Sadržaj seminara:
    1. Postojanje netrivijalnog adekvatnog **GLP**-prostora (danas/idući put).
    2. Adekvatnost **GLP**-prostora za sustav **GLP** (idući put).
    3. Završni dijelovi dokaza potpunosti sustava **GLP** u odnosu na **GLP**-prostore (idući put).

- Alfabet sustava **GLP** je unija sljedećih skupova:
  - skup propozicijskih varijabli $\{p_n \mid n \in \omega\}$;
  - skup logičkih simbola $\{\bot, \to\}$;
  - skup **modalnih operatora dokazivosti** $\{[n] \mid n \in \omega\}$.
- Formula je riječ iz jezika kojeg definiramo rekurzivno:

$$F ::= \bot \mid p \mid (F_1 \to F_2) \mid [n]F_1,$$

gdje je p propozicijska varijabla, F_1 i F_2 su formule, te $n \in \omega$.

Sustav **GLP** sadrži (za sve formule F i G, te $n, m \in \omega$):

1. tautologije propozicijske logike;
2. $[n](F \to G) \to ([n]F \to [n]G)$; (*shema aksioma K*)
3. $[n]([n]F \to F) \to [n]F$; (***shema aksioma L***)
4. $[m]F \to [n]F$ za $n > m$; (***shema aksioma P1***)
5. $\langle m\rangle F \to [n]\langle m\rangle F$ za $n > m$; (***shema aksioma P2***)
6. ako $F,\ F \to G \in$ **GLP**, onda $G \in$ **GLP**; (*zatvorenje p. i. MP*)
7. ako $F \in$ **GLP**, onda $[n]F \in$ **GLP**. (*zatvorenje p. i. gen.*)

MOTIVACIJA

- Neka je $\mathcal{A}$ "dovoljno snažna" teorija aritmetike prvog reda.
- Primjer "jakog niza predikata dokazivosti":
  - Neka je $Pr_0 = Pr$ predikat dokazivosti teorije $\mathcal{A}$.
  - Za $n \in \omega$, $n > 0$, predikat Pr_n formalizira tvrdnju da je formula dokaziva uz pomoć svih istinitih $\prod_n$ formula.
- Aritmetička interpretacija * je funkcija koja svakoj propozicijskoj varijabli p pridružuje aritmetičku rečenicu p^*.
  - Komutira s propozicijskim veznicima.
  - Vrijedi $([n]F)^* = Pr_n(\ulcorner F^* \urcorner)$, za sve modalne formule F i $n \in \omega$.
- Ekvivalentne tvrdnje (Japaridze, 1986.):
  1. Formula F je teorem sustava **GLP**.
  2. Za sve aritm. int. * vrijedi da je F^* teorem aritmetike $\mathcal{A}$.

Relacijska semantika

- Ne postoji klasa relacijskih okvira adekvatnih za **GLP**, u odnosu na koju je **GLP** potpun.
- Ipak, postoji klasa relacijskih **modela** adekvatnih za **GLP**, u odnosu na koju je **GLP** potpun (Beklemishev).

RASPRŠENI PROSTORI

- Skup je gust u sebi ako ne sadrži izoliranu točku.
- Prostor je raspršen ako nijedan neprazan podskup nije gust u sebi.
- Primjeri:
  1. Diskretan prostor.
  2. Ordinal s lijevom topologijom.
  3. Ordinal s uređajnom topologijom.
  4. Neka je (X, R) neki **GL**-okvir, a topologija $\mathcal{T}$ generirana familijom
  $$\{\{x\} \cup R[x] \mid x \in X\}.$$
  Tada je $(X, \mathcal{T})$ raspršen topološki prostor.

GENERALIZIRANI SKUP GOMILIŠTA

- Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, A proizvoljan podskup. Za svaki ordinal α definira se $\mathrm{d}^\alpha A$ na sljedeći način:
  - $\mathrm{d}^0 A = A$;
  - $\mathrm{d}^{\alpha+1} A = \mathrm{d}(\mathrm{d}^\alpha A)$;
  - $\mathrm{d}^\alpha A = \bigcap_{\beta<\alpha} \mathrm{d}^\beta A$, ako je α ordinal druge vrste.
- $\mathrm{d}^1 \omega = \mathrm{d}\,\omega = \{\omega\}$.
- $\mathrm{d}^2 \omega^2 = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\omega^2 = \mathrm{d}\{\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots, \omega^2\} = \{\omega^2\}$.
- $\mathrm{d}^3 \omega^3 = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\omega^3 = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\{\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots, \omega^2, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega \cdot 2, \dots, \omega^2 \cdot 2, \omega^2 \cdot 2 + \omega, \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 2, \dots, \omega^3\} = \mathrm{d}\{\omega^2, \omega^2 \cdot 2, \omega^2 \cdot 3, \dots, \omega^3\} = \{\omega^3\}$.

- Još neke oznake:

$$D_\alpha = \mathrm{d}^\alpha X \setminus \mathrm{d}^{\alpha+1} X;$$
$$S_\alpha = \bigcup_{\beta \le \alpha} D_\beta.$$

- Za svaki zatvoreni skup A vrijedi $\mathrm{d}\, A = A \setminus \mathrm{iso}\, A$.
- Za svaki zatvoreni skup A, skup $\mathrm{d}\, A$ je također zatvoren.
- Neka je α najmanji ordinal za koji skup $\mathrm{d}^\alpha X$ ne sadrži neki element $x \in X$. Tada je α ordinal prve vrste.
- Neka su α i β ordinali, $\beta < \alpha$, te $\mathcal{T}$ lijeva topologija nad α. Tada vrijedi $\mathrm{d}^\beta \alpha = [\beta, \alpha\rangle$.

Karakterizacija raspršenih prostora

- Prostor $(X, \mathcal{T})$ je raspršen ako i samo ako je za neki ordinal α skup $\mathrm{d}^\alpha X$ prazan.
- Cantor-Bendixsonov rang $\rho(X)$ raspršenog prostora X: najmanji ordinal α takav da vrijedi $\mathrm{d}^\alpha X = \emptyset$.
- Takav α je ordinal sljedbenik, alternativna definicija: $S_\beta = X$ gdje je β ordinal za koji vrijedi $\alpha = \beta + 1$.
- Rang $\rho(t)$ točke t: najmanji ordinal α takav da je točka t u skupu D_α (ekv. da nije u skupu $\mathrm{d}^{\alpha+1} X$).

- Surjektivni ograničeni morfizmi između relacijskih okvira su slabiji od izomorfizma, ali "čuvaju" dovoljno strukture.
- Topološka analogija su surjektivna d-preslikavanja, tj. preslikavanja $f : X \to Y$ koja su: otvorena, neprekidna i diskretna po točkama.
- Diskretnost po točkama: za $y \in Y$, skup $f^{-1}(\{y\})$ generira diskretan potprostor.
- Razlika surjektivnog d-preslikavanja i homeomorfizma: nema injektivnosti. Ipak:

ako vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$, i točke x_1 i x_2 su "bliske",
onda vrijedi $x_1 = x_2$.

(bliskost u smislu aksioma T_1: jedna od točaka u svim svojim okolinama sadrži drugu točku)

SVOJSTVA d-PRESLIKAVANJA

- Zatvorenost na kompoziciju.
- Preslikavanje $\rho : X \to \rho(X)$ je surjektivno d-preslikavanje (pretp. lijevu topologiju).
- To je jedino d-preslikavanje čija je kodomena prostor s lijevom topologijom.
- Neka je $f : X \to Y$ jedno d-preslikavanje.

$$f^{-1}(\mathrm{d}\,A) = \mathrm{d}\,f^{-1}(A), \text{ za svaki skup } A \subseteq Y;$$

$$\mathrm{d}^{\alpha} X = f^{-1}(\mathrm{d}^{\alpha} Y);$$

$$\rho_X = \rho_Y \circ f.$$

GLP-PROSTORI

- Politopološki prostor: niz topologija umjesto jedne topologije.
- Prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ je **GLP**-prostor ako za sve $n \in \omega$ vrijedi:
  - prostor $(X, \mathcal{T}_n)$ je raspršen;
  - vrijedi $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_{n+1}$;
  - za svaki podskup S prostora X, skup $\mathrm{d}_n S$ je $\mathcal{T}_{n+1}$-otvoren.
- Treći uvjet je vezan uz shemu $P2$: $\langle m \rangle F \to [n]\langle m \rangle F$ za $n > m$ (više o tome idući put).
- Kako ispuniti treći uvjet?

- Neka je dana topologija $\mathcal{T}$. Njena d-topologija $\mathcal{T}^+$ je generirana sljedećom familijom:

$$\mathcal{T} \cup \{\mathrm{d}\, A \mid A \subseteq X\},$$

  gdje je $\mathrm{d}\, A$ skup gomilišta skupa A.
- Primjeri **GLP**-prostora:
  - Esakia prostor: prva topologija je lijeva, druga uređajna, ostale diskretne.
  - Generalizirani Esakia prostor: **GLP**-prostor gdje je $\mathcal{T}_0$ lijeva topologija, a svaka iduća topologija je d-topologija prethodne topologije.

- Problem: netrivijalni prostori brzo rastu.
  - Lijeva topologija: potrebne barem dvije točke.
  - Uređajna topologija: potrebno barem prebrojivo točaka (ω je diskretan prostor, $\omega + 1$ nije).
  - Potom neprebrojivo mnogo točaka.
  - Potom nedostiživ kardinal.
- Neka je prostor $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov i zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Tada je d-topologija topologije $\mathcal{T}$ diskretna.
- Stoga, d-topologija prebrojivog ordinala s uređajnom topologijom je diskretna.
- Beklemishev i Gabelaia prvi riješili problem naglog rasta.

MAKSIMALNOST

- Topologiju σ nad X nazivamo proširenjem topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang ako vrijedi $\sigma \supseteq \mathcal{T}$ te $\rho_{\mathcal{T}} = \rho_\sigma$.
- Neka uz to vrijedi sljedeće:

  za svaki σ-otvoren skup U i svaku točku $x \in U$ za koju $\rho_X(x)$ nije ordinal druge vrste, postoji $\mathcal{T}$-otvoren skup V takav da vrijedi $x \in V \subseteq U$.

  Tada topologiju σ nazivamo ℓ-proširenjem.
- Prostor X nazivamo (ℓ-)maksimalnim ako topologija $\mathcal{T}$ nema pravo (ℓ-)proširenje koje čuva rang.
- Relacije proširenja između topologija induciraju parcijalan uređaj topologija na danom prostoru.
- Unije proširenja su ponovno proširenja.
- Postoji (ℓ-)maksimalno proširenje (Zornovom lemom).

LME-PROSTORI

- Rješenje naglog rasta: prije d-topologije uzeti ℓ-maksimalno ℓ-proširenje.
- Prostor nazivamo lme-prostorom utemeljenim na topologiji $\mathcal{T}$ ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:
  - topologija $\mathcal{T}_0$ je ℓ-maksimalno ℓ-proširenje topologije $\mathcal{T}$;
  - topologija $\mathcal{T}_{n+1}$ je ℓ-maksimalno ℓ-proširenje topologije $\mathcal{T}_n^+$, za svaki $n \in \omega$.
- Svaki lme-prostor je ujedno **GLP**-prostor.

- Ako je α ordinal i $\mathcal{T}$ lijeva topologija na skupu α, onda je $\mathcal{T}^+$ uređajna topologija.
- Neka je ordinalni prostor jasan iz konteksta. Označimo s u funkciju ranga tog prostora s obzirom na uređajnu topologiju.
- Neka je X neki ℓ-maksimalan prostor. Vrijedi:

$$\rho_X^+ = u \circ \rho_X.$$

- Posljedica:

$$\rho_{n+1} = u \circ \rho_n.$$

- Za sve ordinale α vrijedi $u(\omega^\alpha) = \alpha$.

- Postoji **GLP**-prostor čija nijedna topologija nije diskretna, te je skup točaka prebrojiv.